ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

S.

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Alexander Sudnitson
Tallinn University of Technology

S.1. Понятие множества

- *Множество* есть «объединение в одно целое объектов хорошо различаемых между собой нашей интуицией или нашей мыслью».
- Объекты, составляющие заданное множество, называют его *элементами*.
- Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A (говорят, что a является элементом множества A), записывается следующим образом: $a \in A$
- Если же a не является элементом множества B, то это записывается как $a \notin B$

Способы задания множеств

- *Задать множество* это значит описать правило (отношение) принадлежности элемента множеству.
- Самый простой способ состоит в том, что даётся полный перечень элементов, входящих в данное множество.
  - Например, множество всех цифр A записывается как {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

    A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

    $2 \in A$, *но* $\{2\} \notin A$

Способы задания множеств

- Другой, универсальный, способ задания множеств. Это - задание с указанием такого свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они (т.е. не найдётся никакого объекта, обладающего этим свойством, но не принадлежащее задаваемому множеству).
- Если $P(x)$ – некоторое ограничительное свойство, которому удовлетворяют все элементы множества A, то множество A определяется следующим образом

  $A = \{ x \mid P(x) \}$ или $A = \{ x : P(x) \}$.

Примеры задания множеств

- $A = \{ x \mid x$ *есть цифра* $\}$
- Множество всех натуральных чисел N может быть задано как

  $N = \{ x \mid x$ – *натуральное число* $\}$.
- Таким путём удобно задавать и конечные, но состоящие из большого числа элементов, множества. Например, конечное множество всех студентов ТТÜ может быть задано как

  $\{ x \mid x$ – *студент ТТÜ* $\}$.

Равенство множеств

- Множество A совпадает с множеством B или множества A и B называются <u>*равными*</u>

  $$A = B$$

  если и только, если A и B состоят из одних и тех же элементов.
  - Вопрос: является ли множеством {a, b, a}

    Нет. Почему ?
  - Вопрос: равны ли мн-ва {a, b, c} и {c, b, a } }

    Да.
  - Вопрос: равны ли мн-ва {a, b, c} и {a, { b, c } }

    Нет. Почему ?

Подмножество

- Множество A есть <u>*подмножество*</u> множества B

  $$\boldsymbol{A \subseteq B}$$

  если каждый элемент из A есть элемент в B.
- Другая запись определения отношения “быть подмножеством”

  $B = \{ x \mid x \in A$ *следует, что* $x \in B \}$
  - $\{ 1, 2, 5 \} \subseteq \{1, 2, 7, 5\}$
- <u>Степенное множество</u>

  Множество подмножеств данного множества.
  - Пример. Дано $A = \{ a, b, c \}$, тогда $P(A)=\mathbf{2}^{A}=$

  $=\{ \varnothing, \{a \}, \{b \}, \{c \}, \{a, b \}, \{a, c \}, \{b, c \}, \{a, b, c \} \}$

Пустое множество. Универсум.

- Множесво, не содержащее элементов, называется <u>пустым множеством</u> и обозначается через $\varnothing$.
- Наряду с пустым множеством $\varnothing$ в теории множеств выделяется ещё одно «особое» множество, называемое универсальным (или универсумом), которое мы будем обозначать через $\boldsymbol{E}$. Под универсальным множеством понимается совокупность всех мыслимых элементов какого-нибудь типа определяемого классом решаемых проблем.

Мощность множеств

- Одной из основных характеристик множества является число элементов входящих в множество. Эта характеристика называется *мощностью* множества.
- Мощность конечного множества *A* равна числу элементов в этом множестве и обычно обозначается как

  | *A* |

- Пример. | {a, b, c} | = 3

  | {a, { b, c } } | = 2

Равномощность конечных множеств

- Два множества называются *равномощными*, если между элементами этих множеств удаётся установить взаимно однозначное соответствие.
- Для конечных множеств их равномощность означает, что они имеют одинаковое число элементов.
  - Например,

    A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

    B = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j }

    | A | = | B |

Равномощность множеств (1)

- Теория множеств изучает конечные и бесконечные системы предметов (элементов).
- Сравнение двух множеств заключается в общем случае в установлении взаимно однозначного соответствия между их элементами.
- Примером равномощных множеств являются множество натуральных чисел *N* и множество квадратов натуральных чисел *Q* (хотя они и не являются конечными множествами).

Равномощность множеств (2)

- Взаимнооднозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством квадратов натуральных чисел устанавливается, если записывать одну под другой одновременно две строки, выписывая в первую натуральные числа и тут же под ними во второй строке записывая квадраты этих чисел:
  - 1 2 3 4 5 6 7 8 …
  - 1 4 9 16 25 36 49 64 …
- Натуральный ряд чисел в теории множеств принят за некоторый эталон класса бесконечных множеств.

Счётное множество. Континуум.

- Любое множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счётным.*
- Множествовсех действительных чисел отрезка [0, 1] не является счётным (теорема Кантора).
- Любое множество, равномощное множеству действительных чисел, называется *континуальным*. Говорят, что оно обладает мощностью *континуума.*
- Мощности произвольных множеств называются также *кардинальными числами.*

S.2. Основные операции над множ-ми

- Если даны два произвольных множества, то по ним можно образовать новые множества, называемые их объединением, персечением.
- *Пересечением* множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех элементов множества *A*, которые являются также элементами *B*. Пересечение *A* и *B* обозначается через $\boldsymbol{A \cap B}$.
- *Объединением* множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из из всех элементов множества *A* и всех элементв *B*. Объудинение *A* и *B* обозначается через $\boldsymbol{A \cup B}$.

Диаграмма Венна (Эйлера)

- В общем случае *диаграммами Венна* называют фигуры, изображающие множества и наглядно демонстрирующие отношения и свойства операций над множествами.
- Универсум *E* представляется прямоугольником
- Исходные множества представляются замкнутыми контурами (в частности, кругами)
- Точки, которые лежат внутри различных областей диграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств

Диаграмма Венна

Если представить универсальное множество *E* на рисунке условно в виде прямоугольника, то множество *A*, состоящее из элементов обладающих характеризующим его свойством $\boldsymbol{P_A}$, ограничивается на этом рисунке некоторой выделенной областью.

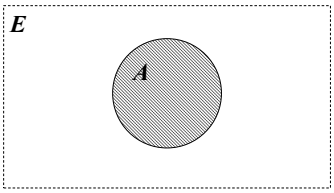
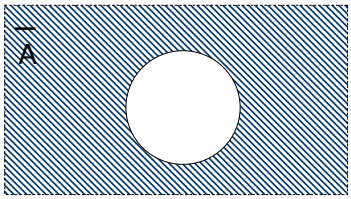


Диаграмма Венна - дополнение

Иллюстрацией результата операции дополнения множества A является выделенная область на рисунке.



Такое иллюстративное представление является примером так называемой диаграммы Венна.

Диаграмма Венна - объединение

Иллюстрацией результата операции объединения множества A и множества B является заштрихованная область на диаграмме.

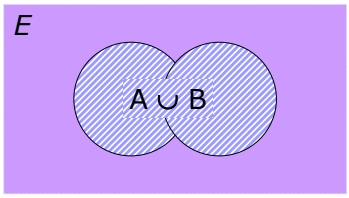
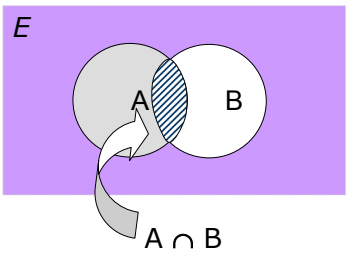


Диаграмма Венна - пересечение

Иллюстрацией результата операции объединения множества A и множества B является заштрихованная область.

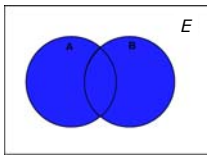


Объединение множеств (пример)

A = {a, b, c, d}
B = {c, d, e, f}

Пересекающиеся множества

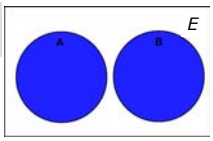
A ∪ B = {a, b, c, d, e, f}



A = {a, b, c, d}
B = {x, y, z}

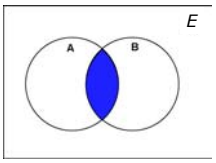
Непересекающиеся множества

A ∪ B = {a, b, c, d, x, y, z}



Пересечение множеств (пример)

A = {a, b, c, d}
B = {a, b}
A ∩ B = {a, b}



A = {a, b, c, d}
B = {x, y, z}
A ∩ B = ϕ

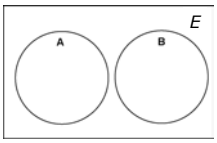
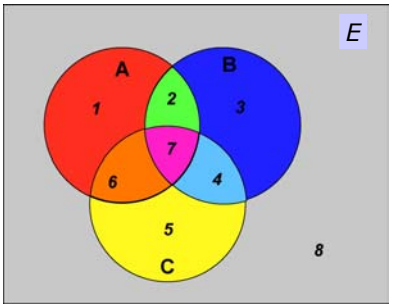


Диаграмма Венна (3 множества)

8 возможных областей представимых диаграммой Венна для трёх множеств

1 $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
2 $A \cap B \cap \bar{C}$
3 $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$
4 $\bar{A} \cap B \cap C$
5 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$
6 $A \cap \bar{B} \cap C$
7 $A \cap B \cap C$
8 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



Свойства операций над множествами

Операции над множествами ∪, ∩, ¬ обладают рядом свойств:

- Коммутативность

$A \cap B = B \cap A$ ⋮ $A \cup B = B \cup A$

- Ассоциативность

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ⋮ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Дистрибутивность

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ⋮ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Идемпотентность

$A \cap A = A$ ⋮ $A \cup A = A$

Свойства операций над множествами

- Свойства операций с «особыми» множествами ∅ и E

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$ ⋮ $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$

Теоремы А. деМоргана

$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ ⋮ $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

- Инволюция

$\neg(\neg A) = A$

Всякое равенство, тождественно выполняющееся в алгебре множеств,при замене знака ∪ знаком ∩, и наоборот, и замене ∅ , на E и наоборот, переходит в новое равенство, также тождественно выполняющееся.

Законы Де Моргана

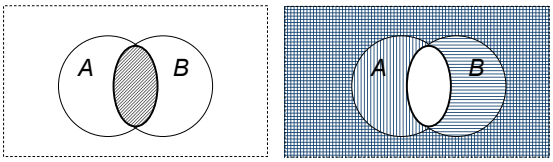
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Сделаем следующее замечание относительно теорем деМоргана. Говорят, что эти две теоремы деМоргана двойственны:

- дополнение к пересечению двух множеств равно объединению их дополнений;
- дополнение к объединению двух множеств равно пересечению их дополнений;

Заметим, что эти теоремы переходят одна в другую при замене слова «объединение» на «пересечение», и наоборот.

Иллюстрация законов Де Моргана



Заштрихованная часть на диаграмме слева равна ($A \cap B$), незаштрихованная область (внешняя по отношению к обведенному контуру равна $\neg(A \cap B)$. На диаграмме справа часть квадрата, заштрихованная горизонтально, равна $\neg A$; заштрихованная вертикально равна $\neg B$. Часть заштрихованная *каким-либо* способом, образует $((\neg A) \cup (\neg B))$; легко видеть, что она совпадает с $\neg(A \cap B)$.

Формулы

Если даны некоторые множества, то новые множества могут быть представлены алгебраическими выражениями (формулами) образованными этими множествами и операциями над ними с использованим приведённых свойств (законов).

Например, формулой является запись

$$(A \cup B) \cap (\neg C)$$

Порядок выполнение действий в выражении определяется скобками.

Ранг операций

Условно порядок выполнения операций определяется приписываемым ей рангом с учётом, что знак операции с большим рангом имеет и бо'льшую область действия. Убывающий ранг операций следующий: $\cup, \cap, \neg$.

Пример:

$(A \cap B) \cup (\neg C)$ и $A \cap B \cup \neg C$

«Обобщенные» операции

Заметим,что закон ассоциативности позволяет не только опускать скобки, но и ввести «обобщенные» операции объединения и пересечения над совокупностью множеств и тем самым мы можем объединение и пересечение совокупности множеств $A_1, A_2, \dots A_n$ (или A_i, $i \in I=\{1, 2, \dots ,n\}$) записывать в виде «свёрток» соответственно

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \cup_{i \in I} A_i$. $\quad A = \cup_{i \in I} A_i$

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \cap_{i \in I} A_i \quad B = \cap_{i \in I} A_i$

Обобщённые законы деМоргана

- $\neg(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (\neg A_1) \cap (\neg A_2) \cap \dots \cap (\neg A_n)$
  $\neg(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} (\neg A_i)$
- $\neg(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = (\neg A_1) \cup (\neg A_2) \cup \dots \cup (\neg A_n)$
  $\neg(\cap_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (\neg A_i)$
- Покажем верность первого закона для n=3

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = \overline{((A_1 \cup A_2) \cup A_3)} =$$

$$= \overline{(A_1 \cup A_2)} \cap \overline{A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_n}$$

Здесь мы использовали разные символы для обозначения операции дополнения.

Операция вычитания множеств

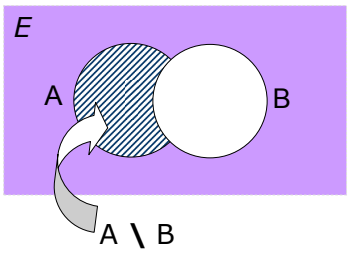
- Кроме операций ¬, ∪ и ∩ известны и другие операции над множествами.
- *<u>Разностью</u>* между множеством *A* и множеством *B* называется множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не являются элементами B. Разность между A и B обозначается через $A \setminus B$
- Пример: $A = \{0, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  $B = \{0, 1, 2, 3, 9, 10\}$

$B \setminus A = \{1, 2, 3\}$

$A \setminus B = \{6, 7, 8\}$

Диаграмма Венна - разность

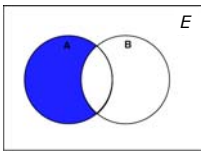
Иллюстрацией результата операции вычитания множества B из множества A является заштрихованная область.



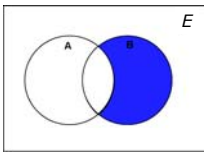
Вычитание множеств (пример)

A = {a, b, c, d}
B = {a, c, f, g }

A \ B = {b, d}



B \ A = {f, g}



Симметрическая разность множеств

- *Симметрической разностью* множества *A* и множества *B* называется множество, состоящее из тех элементов которые являются элементами либо множества A, либо являются элементами B (но не принадлежат одновременно как A, так и B). *Симметрическая разность* между A и B обозначается через

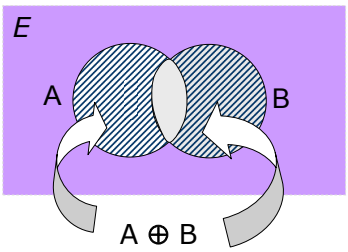
$$A \oplus B$$

- Пример: $A = \{0, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  $B = \{0, 1, 2, 3, 9, 10\}$

$A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

Диаграмма Венна - операция ⊕

Симметрическая разница множества A и множества B выделена заштрихованной областью.



Свойства симметрической разности

- коммутативность:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

- ассоциативность:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

- существование нейтрального элемента:

$$A \oplus \varnothing = A = \varnothing \oplus A$$

- существование симметричного элемента:

$$A \oplus A = \varnothing$$

- дистрибутивность относительно пересечения:

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

Правила элиминации

- $A \setminus B = A \cap \neg B$

  Убедиться в верности данного утверждения можно рассуждая с применением диграмм Венна (самостоятельно).
- $\mathbf{A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A} =$

  $= (A \cap \neg B) \cup (B \cap \neg A) =$

  $= (A \cup B) \cap \neg(A \cap B)$
- *Отсюда можно сделать вывод, что в любой формуле можно избавиться от операций вычитания и перейти к формуле, в которой встречаются только отрицание, объединение и пересечение.*

S.3. Отображения. Пары и n-ки.

- Упорядоченную пару с первым элементом a_1 и вторым элементом a_2 принято обозначать

  $$\langle a_1, a_2 \rangle$$
- Наряду с упорядоченными парами рассматриваются в зависимости от числа элементов упорядоченные тройки, четвёрки и т.д..
- Упорядоченная система из *n*-элементов записывается по аналогии в виде $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ и называется ***n-кой***
- $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$, но $\langle 1, 2, 3 \rangle \neq \langle 2, 3, 1 \rangle$

Прямое произведение

- Пусть даны два множества *A* и *B*. Множество *упорядоченных пар* элементов, из которых первый принадлежит *A*, а второй – *B*, называется *прямым (декартовым) произведением* множеств *A* и *B* и обозначается

  $$\boldsymbol{A \times B}$$
- Формально множество $\boldsymbol{A \times B}$ определяется как

  $$A \times B = \{ < a, b > \mid a \in A \text{ и } b \in B \}$$
- пусть $\boldsymbol{A} = \{ 1, 2, 3 \}$ и $\boldsymbol{B} = \{ 4, 5 \}$,

  тогда $\boldsymbol{A \times B} =$

$=\{ < 1, 4 >, < 1, 5 >, <2, 4 >, < 2, 5>, < 3, 4>, < 3, 5>\}$

Прямое произведение *n* множеств

- Каждой *n-ке* соответствует некоторая точка *n*-мерного пространства. Поэтому *n-ки* иногда нзывают векторами или кортежами. Другими словами, *n-ки* являются упорядоченными множествами.
- Пусть даны множества $\mathbf{A_1, A_2, \ldots A_n}$, которые проиндексированы по порядку, тогда их прямым произведением будет являться множество

$$\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{< a_1, \ldots, a_n > \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}}$$

где $\mathbf{< a_1, \ldots, a_n >}$ является *n-кой* (кортеж, вектор).
- Далее мы ограничим себя рассмотрением только множеств пар (двухмерных пространств).

Соответствие (отображение)

- Пусть даны два множества ***A*** и ***B*** , тогда подмножество их прямого произведения ***P*** называется *соответствием* между множествами ***A*** и ***B***, т.е.

$$P \subseteq A \times B,$$

где ***A*** называют областью отправления, а ***B*** – областью прибытия соответствия ***P***.

- Замечание по терминологии.

  Во многих книгах используется термин «отношение», а не «соответсвие». Мы же будем использовать наряду с термином «отношение» и термин «соответствие».

Соответствие (пример)

Множества A и B, состоящие из целых чисел таковы, что

A = { 2, 3, 8 } и B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.

Соответствием между множествами *A* и *B*, которое содержательно описывается фразой «число из A есть делитель числа из B», представляется множеством

P = {⟨2, 2⟩, ⟨3, 3⟩, ⟨2, 4⟩, ⟨2, 6⟩, ⟨3, 6⟩},

т.е. из всех 21-й пары прямого произведения A на B в соответствие P «вошли» только 5 пар.

Формы задания соответствий

$P \subseteq A \times B$

{⟨2, 2⟩, ⟨3, 3⟩, ⟨2, 4⟩, ⟨2, 6⟩, ⟨3, 6⟩}

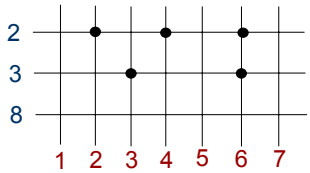
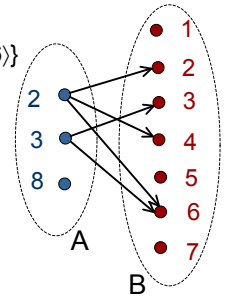


График соответствия P



Стрелочное представление соответствия P

Сечение по элементу

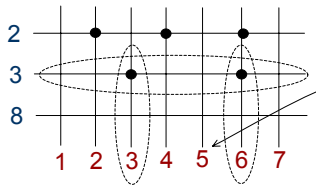
Пусть $a \in A$, $P \subseteq A \times B$, $b \in B$

- тогда *левое сечение S* по *a* есть

$$S_l(a, P) = \{ b \mid b \in B \text{ и } \langle a, b \rangle \in P \},$$

- и *правое сечение S* по *b* есть

$$S_r(P, b) = \{ a \mid a \in A \text{ и } \langle a, b \rangle \in P \}$$



$S_l(3, P) = \{ 3, 6 \}$

$S_r(P, 5) = \varnothing$

Сечение по подмножеству

- Пусть **A'⊆ A** ,

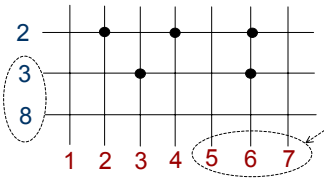
тогда *левое сечение S* по подмножеству *A'* есть

$$\mathbf{S_l\,(A', P) = \cup_{a\in A'}\ S_l\,(a, P)}$$

- Пусть **B'⊆ B ,**

тогда *правое сечение S* по подмножеству *B'* есть

$$\mathbf{S_r\,(P, B') = \cup_{b\in B'}\ S_r\,(P, b)}$$



A' ={ 3, 8 }

S_l (**A'**, P) = { 3, 6 }

B' ={ 5, 6, 7 }

S_r (P, **B'**) ={ 2, 3 }

Проекция

- Проекция пары α = < a, b >

  $Pr_1\,(\alpha) = a$ $\qquad$ $Pr_2\,(\alpha) = b$
- Если **P ⊆ A × B** , тогда

  $\mathbf{Pr_1\,(P) = \{\, a \mid a = Pr_1\,(\alpha),\ \alpha \in P \,\}}$

  $\mathbf{Pr_2\,(P) = \{\, b \mid b = Pr_2\,(\alpha),\ \alpha \in P \,\}}$
- Pr_1 (P) есть *область определения*
- Pr_2 (P) есть *область значений*
- Пример. P = {⟨2, 2⟩, ⟨3, 3⟩, ⟨2, 4⟩, ⟨2, 6⟩, ⟨3, 6⟩}

  A = { 2, 3, 8 } $\qquad$ B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.

  Pr_1 (P) = { 2, 3 } $\qquad$ Pr_1 (P) ≠ A

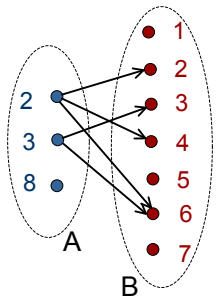
  Pr_2 (P) = { 2, 3, 4, 6} $\qquad$ Pr_2 (P) ≠ B

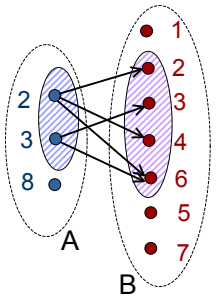
Функция

- Если A = Pr_1 (P), то мы имеем *всюду (полностью) определенное* соответствие
- Если B = Pr_2 (P), то мы имеем *сюръективное* соответствие
- Соответствие называется *однозначным,* если его левое сечение по каждому элементу состоит не более чем из одного элемента.
- ***Функция*** есть всюду определенное и однозначное соответствие.

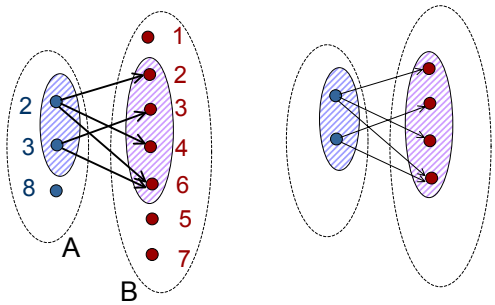
Формы задания соответствий

P ⊆ A × B = {⟨2, 2⟩, ⟨3, 3⟩, ⟨2, 4⟩, ⟨2, 6⟩, ⟨3, 6⟩}

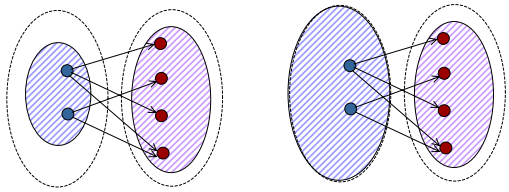




Формы задания соответствий

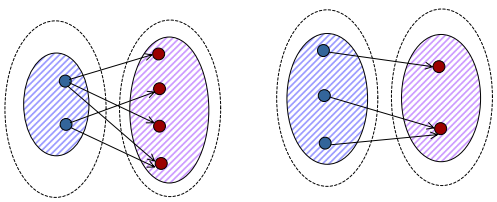


Виды соответствий



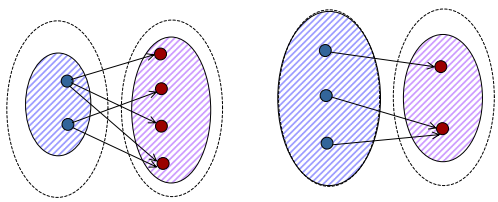
Полностью определенное соответствие

Виды соответствий



Однозначное соответствие

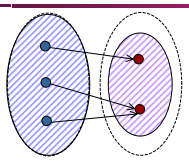
Виды соответствий

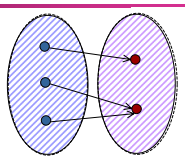


Функция

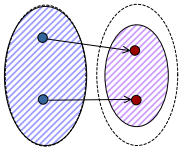
(полностью определенное и однозначное соответствие)

Виды функциональных соответствий

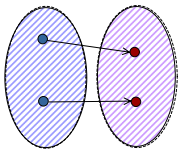




Сюръекция



Инъекция

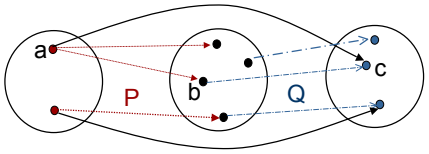


Биекция

Композиция соответствий

Пусть даны соответствия $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ тогда их *композицией* будет соответствие **R** (записываемое как **P ° Q**) такое, что $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ и

$R = \{ < a, c> \mid$ существует $b \in B$ такое, что $< a, b> \in P$ и $< b, c> \in Q \}$



R

Пример композиции соответствий

Пусть даны множества

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $C = \{ u, v, w, x, y \}$,

а также соответствия $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$

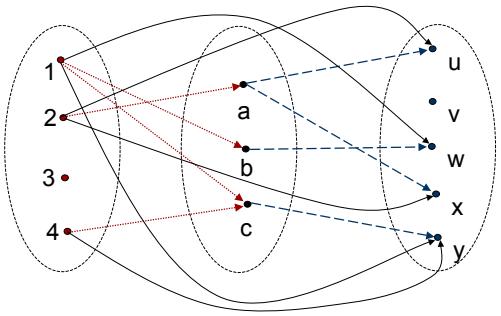
$P = \{ < 1, b >, < 1, c >, < 2, a >, < 4, c > \}$,

$Q = \{ <a, u >, <a, x >, <b, w >, <c, y > \}$,

тогда в результате операции композиции P и Q получим соответствие $R=P \circ Q =$

$= \{ < 1, w >, < 1, y >, < 2, u >, < 2, x >, < 4, y > \}$

Пример композиции соответствий



$\{ < 1, w >, < 1, y >, < 2, u >, < 2, x >, < 4, y > \}$

S.4. Бинарные отношения и их свойства

Мы определяем *отношение* как частный случай соответствия, когда область прибытия совпадает с областью отправления:

$$R \subseteq A \times A$$

$A \times A = A^2$ называется *квадратом* множества **A.**

$$R \subseteq A^2$$

S.4.1 Формы задания отношений

Формы задания отношений рассмотрим на примере.
Пусть A = { a, b, c, d }

<u>1 форма:</u> заданием ***R*** как множества
R = { < a, b >, < b, a >, < b, b >, < b, c >, < c, d > }

<u>2 форма:</u> задание посредством *матрицы смежности*

$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

<u>3 форма:</u> графическое задание при помощи *графа*

< A, R >

S.4.2 Свойства отношений.

Дано $R \subseteq A \times A$

Тот факт, что $< a, b > \in R$ будем обозначать также как
a R b

<u>1. Рефлексивность.</u>

Для всех $x \in A$ верно, что x R x

Все элементы лежащие на главной диагонале матрицы смежности равны 1.

Определим *диагональное отношение* как

$\delta = \{ < a, a > \mid a \in A \}$

Дигональное отношение

Например, диагональным отношением будет

$\delta = \{ < a, a >, < b, b >, < c, c >, < d, d > \}$

$$\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Отношение обладает свойством рефлексивности, если верно,что

$$\delta \subseteq R$$

Свойства отношений

2. Антирефлексивность.

$x\,R\,y$ следует, что $x \neq y$

$R \cap \delta = \varnothing$

3. Симметричность.

$x\,R\,y$ следует, что $y\,R\,x$

Матрица смежности симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а при задании отношения в виде графа следствием симметричности является наличие между всякой парой вершин, находящихся в отношении ***R***, двух противоположно направленных дуг.

Отношение ***R*** симметрично, если и только если

$R = R^{-1}$

Свойства отношений

4. Асимметричность.

$< x, y > \in R$ следует, что $< y, x > \notin R$

В соответствующем графе нет петель и не может быть случая, когда две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами.

Если отношение асимметрично, то оно антирефлексивно.

Отношение *R* асимметрично, если и только если

$R \cap R^{-1} = \varnothing$

Свойства отношений

5. Антисимметричность.

$< x, y > \in R$ следует, что $< y, x > \notin R$

$< x, y > \in R$ и $< y, x > \in R$ следует, что $x = y$

Отношение *R* антисимметрично, если и только если

$R \cap R^{-1} \subseteq \delta$

6. Транзитивность.

$x, y, z \in A$

$< x, y> \in R$ и $< y, z> \in R$ следует, что $< x, z> \in R$

Отношение *R* транзитивно, если и только если

$R \circ R \subseteq R$

Равенство достигается, если транзитивное отношение ещё и рефлексивно.

S.4.3 Транзитивное замыкание

Дано отношение $R \subseteq A \times A$, тогда его *транзитивным замыканием* будет отношение $R^\wedge \subseteq A \times A$ минимальное по числу элементов (пар) такое, что оно обладает свойством транзитивности и $R \subseteq R^\wedge$.

$< x, y > \in R^\wedge$ если существует цепочка элементов из *A*

$x = z_0, z_1, \ldots z_n = y$

такая, что

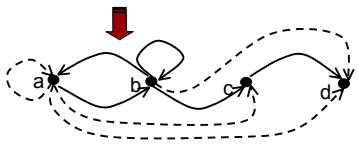
$z_0\,R\,z_1,\ z_1\,R\,z_2, \ldots z_{n-1}\,R\,z_n$

Если R транзитивно, то $R = R^\wedge$.

Транзитивное замыкание

<u>Алгоритм нахождения транзитивного замыкания</u>
рассмотрим на примере:

R = { < a, b >, < b, a >, < b, b >, < b, c >, < c, d > }



R^ = { < a, b >, < b, a >, < b, b >, < b, c >, < c, d >
< a, a >, < a, c >, < b, d >, < a, d > }

Транзитивное замыкание

Содержательно, транзитивное замыкание определяется всеми путями существующими в графе (начальная и конечная вершины пути определяют соответствующую пару).

R есть все пути длиной 1 (из 1-й дуги),
$R^2 = R \circ R$ есть все пути длиной 2 (из 2-х дуг),
$R^3 = R \circ R \circ R$ есть все пути длиной 3 (из 3-х дуг),
и т. д.

$R^\wedge = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$

Транзитивное замыкание

<u>Вычисление транзитивного замыкания заданного отношения.</u>

R^* есть текущее множество (отношение)

В начале вычисления имеем
R^*_1 =R={< a, b >, < b, a >, < b, b >,< b, c >, < c, d>}

$R^2 = R \circ R =$
{ < a, a >, < a, b >,< b, c > < a, c >, < b, b >, < b, d > }

R^*_2 = { < a, b >, < b, a >, < b, c >, < c, d > < a, a >,
< a, c >, < b, b >, < b, d > }

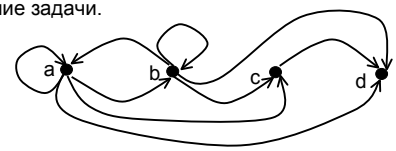
Транзитивное замыкание

$R^3 = R \circ R \circ R$ = { < a, a >, < a, c >, < a, b >, < a, d>,
< b, c >, < b, b >, < b, a >, < b, d >}

R^*_3 = { < a, b >, < b, a >, < b, c >, < c, d > < a, a >,
< a, c >, < b, b >, < b, d >, < a, d > }

$R^*_4 = R^*_3$, т. е. выполнено условие останова алгоритма.

Текущее множество (представлено в виде графа) есть решение задачи.



S.5. Отношение эквивалентности

$R \subseteq A \times A$ есть *отношение эквивалентности*, если оно

- релексивно
- симметрично
- транзитивно

Пример №1.

A есть множество студентов ТТÜ
R есть отношение: «учиться в одной группе»

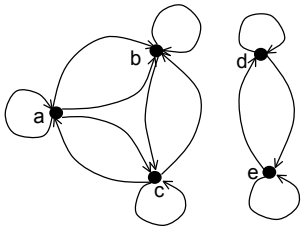
Нетрудно заметить, что это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и поэтому является отношением эквивалентности.

Отношение эквивалентности

Пример №2.

A = { a, b, c, d, e }
R = { < a,a >, < a, b >, < a, c >, < b, a >, < b, b >, < b, c >, <c, a >, < c, b >, < c, c >, < d, d >, < d, e >, < e, d >, < e, e > }

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	0	0
b	1	1	1	0	0
c	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	1	1



Отношение эквивалентности

Класс эквивалентности элемента *a* относительно отношения эквивалентности *R* есть множество

$$\{ x \mid x \, R \, a \}$$

Фактор–множество множества *A* относительно отношения эквивалентности *R* есть множество *A / R* всех классов эквивалентности.

Пример.
Пусть ***a*** – конкретный студент, тогда класс эквивалентности ***a*** есть группа, в которой студент учится, а фактор - множество есть совокупность всех учебных групп ТТÜ.

Разбиение

Разбиением π множества *A* называется множество подмножеств $B_1, \ldots, B_m$ множества *A* таких, что

- $B_i \neq \varnothing$, $\quad i = 1, \ldots, m$
- $B_i \cap B_j = \varnothing$, $\quad i \neq j$
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m = A$

Теорема.
Всякому отношению эквивалентности ***R*** можно сопоставить своё разбиение на множестве ***A*** и всякому разбиению на ***A*** - своё отношение эквивалентности. Блок разбиения соответствует фактор-множеству.

Пример. A = {a, b, c, d, e }
π = { { a, b, c }, { d, e } }

S.6. Отношение порядка и решетка

$R \subseteq A \times A$ есть *отношение нестрогого частичного порядка*, если и только если оно

- рефлексивно
- антисимметрично
- транзитивно

В таком случае ***A*** называют *частично-упорядоченным множеством* и обозначают через $(A, \geq)$

Пусть дано $(A, \geq)$ и $B \subseteq A$. Тогда ***a*** из *A* есть *мажоранта* множества ***B,*** если для всех ***b*** из *B* справеливо утверждение $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$.

Миноранта. Максимум. Минимум. НВГ

Пусть дано $(A, \geq)$ и $B \subseteq A$. Тогда ***a*** из *A* есть *миноранта* множества ***B,*** если для всех ***b*** из *B* справеливо утверждение $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$.

Если мажоранта принадлежит B, то она называется *максимумом* множества B.

Если миноранта принадлежит B, то она называется *минимумом* множества B.
Как легко показать, при условии существования максимум (минимум) единственен.

Если множество всех мажорант в свою очередь имеет минимум, то этот элемент единственен и его называют *наименьшей верхней гранью (НВГ)* и обозначают ***Sup B.***

НВГ и ННГ. Решётка.

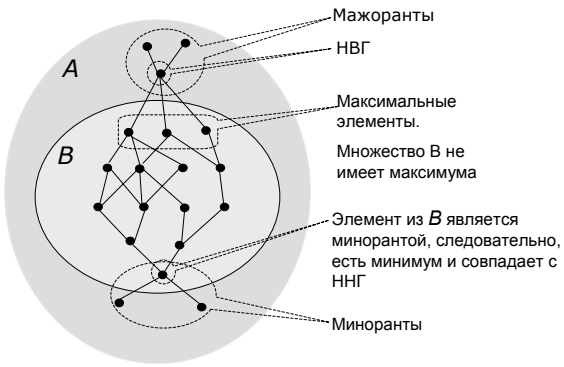
Другое определение НВГ:
Пусть дано $(A, \geq)$ и $B \subseteq A$. Тогда ***a*** из *A* есть НВГ множества *B*, если и только если

1) $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ для всех $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$
2) Если $\boldsymbol{a'} \geq \boldsymbol{b}$ для всех $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{a'} \neq \boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a'} \geq \boldsymbol{a}$.

Если множество всех минорант в свою очередь имеет максимум, то этот элемент единственен и его называют *наибольшей нижней гранью (ННГ)* и обозначают ***Inf B.***

Решетка есть частично упорядоченное множество $L = (A, \geq)$, для любых двух элементов которого найдется НВГ (supremum)и ННГ (infimum).

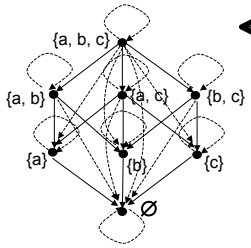
Иллюстрация



Пример решётки. Диаграмма Хассе

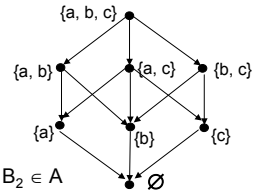
На множестве $A = 2^{\{a, b, c\}} = \{ \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing \}$ задано частично упорядоченное отношение $\geq$: «быть подмножеством».

Граф $< 2^{\{a, b, c\}}, \geq >$



$\Leftrightarrow$

Диаграмма Хассе



$B_1, B_2 \in A$

$\sup(B_1, B_2) = B_1 \cup B_2$

$\inf(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$

Линейный порядок. Строгий порядок.

Если отношение R удовлетворяет условию *дихотомии* (для любых ***a*** и ***b*** из A справедливо либо ***a*** R ***b*** , либо ***b*** R ***a***), то такое отношение называется *линейным порядком.*

Если отношение асимметрично (антисимметрично и антирефлексивно) и транзитивно, то оно называется *строгим порядком* (A, $>$).

S.7. Алгебра и алгебраические системы

Функция типа $M^n \to M$ называется ***n****-арной операцией.*

$$M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n}$$

Множество M вместе с заданной на нём совокупностью операций $\Psi = \{ \psi_1, \ldots, \psi_m, \ldots \}$, т.е. система $A = < M, \Psi >$ называется *алгеброй.*

M – *основное (несущее) множество* алгебры ***A***

Ψ - *сигнатура* алгебры ***A***

Операции характеризуются арностью.

Примеры алгебр.

№1.

Множество целых чисел с бинарной операцией сложения и костантой **0** образуют алгебру

$< Z, +, 0 >$, где

$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

+ есть арифметическая операция сложения

$(Z \times Z \to Z)$

0 –константа ноль.

№2.

Множество рациональных чисел ***R***, с бинарными операциями сложения и умножения и унарной операцией «минус», а также с константами 0 и 1 образуют алгебру

$< R, +, \cdot, -, 0, 1 >$

Бинарные операции и их свойства

Пусть ψ-<u>бинарная</u> операция
Для $a, b \in M$
запись $\psi(a, b)$ равносильна $a \psi b$

Операция ψ называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in M$
$(a \psi b) \psi c = a \psi (b \psi c)$.
Операция ψ называется коммутативной, если
$a \psi b = b \psi a$

Множество $M^* \subseteq M$ *замкнуто относительно операции* ψ ,если и только если
для любых $a, b \in M^*$ верно, что $a \psi b \in M^*$

Бинарные операции и их свойства

Если ψ и φ есть две бинарные операции на M ,
то ψ называется *дистрибутивной относительно* φ ,если
$a \psi (b \varphi c) = (a \psi b) \varphi (a \psi c)$

Наряду с несущим множеством и набором операций конкретная алгебра определяется совокупностью специальных констант.

Элемент ***e*** такой, что для любого $a \in M$
$a \psi e = e \psi a = a$
называется *нейтральным элементом (единицей).*

Бинарные операции и их свойства

Элемент ***z*** (константа) такой, что
для любого $a \in M$
$a \psi z = z \psi a = z$
называется *нулём.*

Элемент a^{-1} назывется обратным к элементу ***a***
относительно операции ψ, если
$a \psi a^{-1} = e$

Пример Булевой алгебры

Свойства операций определяются *аксиомами* и тем самым выделяется некоторый “класс” алгебр.
В качестве <u>примера</u> рассмотрим *булевы алгебры*
$< C, +, \bullet, \neg, 0, 1 >$
с двумя бинарными и одной унарной операцией и следующими аксиомами (E. V. Huntington, 1904):

1) ***C*** замкнуто относительно операций **+** и $\bullet$.

2) ***C*** содержит нейтральный элемент (единицу) относительно операции «$\bullet$», обозначаемый через ***1***.
C содержит нейтральный элемент (единицу) относительно операции «**+**» , обозначаемый через ***0***.

Булевы алгебры

3) ***C*** коммутативно относительно операций • и +.

4) Операция • дистрибутивна относительно операции **+** и операция **+** дистрибутивна относительно операции **•.**

5) Для любого элемента ***a*** существует обратныый элемент a^{-1} такой, что
$a + a^{-1} = 1$
$a \bullet a^{-1} = 0$
Унарная операция «¬» есть операция нахождения обратного элемента.

6) ***C*** содержит по крайней мере два различных элемента.

Другое определение булевой алгебры

Другое определение булевой алгебры (с явным использованием унарной операции).

Алгебра < C, +, •, ¬, 0, 1 > с двумя бинарными и одной унарной операцией является *булевой* алгеброй, если и только если она удовлетворяет следующим аксиомам:

$x+y = y+x$	$x \bullet y = y \bullet x$
$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(x \bullet y)\, z = x\, (y \bullet z)$
$x \bullet (y+z) = x \bullet y+x \bullet z$	$x + (y \bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$
$x + 0 = x$	$x \bullet 1 = x$
$x + (\neg x) = 1$	$x \bullet (\neg x) = 0$

0 есть единица (нейтральный элемент) относительно «+»;
1 есть единица относительно «•»

Примеры булевых алгебр

№ 1 $< 2^S, \cup, \cap, \neg, \varnothing, E >$
есть *булева алгебра множеств.*
2^S – множество подмножеств множества ***S***.

№ 2 $< \{0, 1\}, \&, \vee, \neg, 0, 1 >$
есть *булева алгебра логики.*

№ 3
Пусть ***C*** есть множество делителей числа ***30***, C = {1. 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, пусть «**+**» находит наименьшее общее кратное, «•» находит наибольший общий делитель, а (¬x) находит 30/x. Тогда
< C, +, •, ¬, 1, 30 >
есть *булева алгебра.*

Полугруппа. Моноид. Группа.

Рассмотрим некоторые другие наиболее «популярные» классы алгебр.

Полугруппой называется алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией (умножение).
< M, • >
Если операция коммутативна, то полугруппа называется *абелевой (коммутативной).*

Полугруппа с единицей называется *моноидом.*
< M, • , 1 >

Группой называется полугруппа с единицей (моноид), в которой для каждого элемента ***a*** существует элемент a^{-1}, который является обратным к ***a.***

Алгебраическая система. Решётка.

Группу можно определить как алгебру с одной бинарной ассоциативной операцией, нейтральным элементом относительно этой операции и одной унарной опкрацией.
$< M, \bullet, \neg, 1 >$

Множества, на которых кроме операций заданы отношения, называются *алгебраическими системами.*

Модели есть множества, на которых заданы только отношения.

Решётка – это алгебраическая система

$< M; \geq, \cup, \cap >$