ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

F.

ТЕОРИЯ
БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

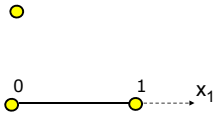
Alexander Sudnitson
Tallinn University of Technology

F.1.
БУЛЕВО ПРОСТРАНСТВО.
ПОНЯТИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ.

F.1.1 Булево пространство

В современной математике пространство определяется как множество каких-либо объектов, которые называются его точками.

n - мерное булево пространство содержит 2^n точек.

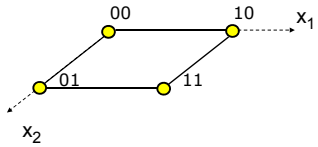


n = 0 $2^n = 1$

n = 1 $2^n = 2$

Если на x_1 смотреть как на (булеву) переменную, то она принимает одно из значений из 2-х элементного множества {0, 1}.

2-мерное булево пространство



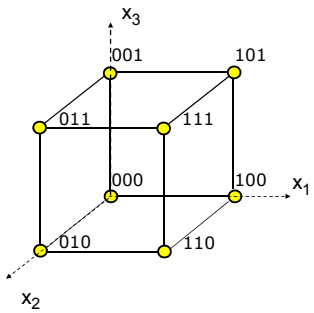
n = 2 $2^n = 4$

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} =$$
$$= \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$$

Здесь мы встречаем понятие прямого произведения «×», с определением которого встретимся в разделе *теории множеств*.

3-мерное булево пространство

n = 3 $2^n = 8$

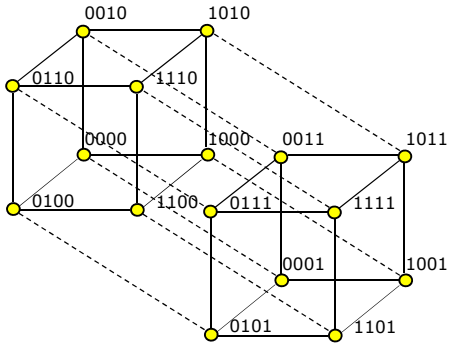


Каждая точка определяется значением координат (булев или двоичный вектор)

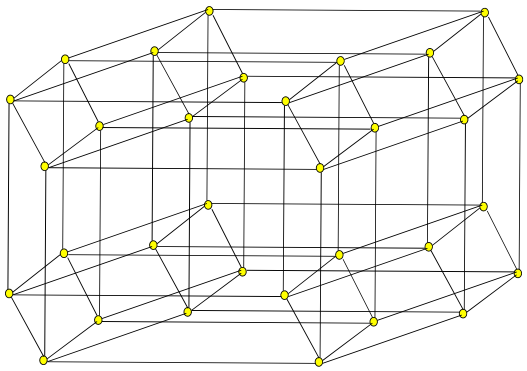
Будем называть *соседними* точки связанные (абстрактным) ребром.

Обратите внимание, что они различаются значением только по одной координате.

4-мерное булево пространство



5-мерное булево пространство



7

F.1.2 Функция. Булева функция

Функция – это одно из основных понятий математики.

Пусть заданы два множества X и Y и каждому элементу x из X поставлен в соответствие элемент y из Y, который обозначен через $f(x)$. В этом случае говорят, что на множестве X задана функция f (а также – что переменная y есть функция переменной x, или что y зависит от x) и пишут $f : X \to Y$.

Аргумент функции есть переменная от значений которой зависят значения функции.

Функции различаются по числу аргументов.

Если функция имеет аргументов, то это записыватеся как:

$f(x_1, x_2, \dots x_n)$

Булева функция

Булева функция (функция алгебры логики) есть функция, аргументы которой, равно как и сама функция, принимают значение из двухэлементного множества (обычно {0, 1}).

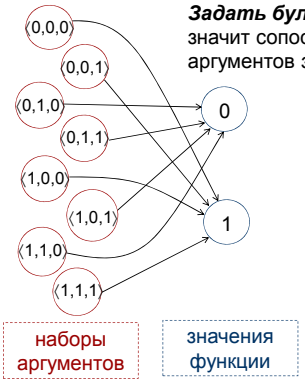
Возьмём, *к примеру*, булеву функцию с 3-мя аргументами $f(x_1, x_2, x_3)$.

В этом случае существует 8 различных подстановок конкретных значениий аргументов (их называют ***наборами аргументов***). Перечислим их как элементы множества состоящего из троек

{⟨0,0,0⟩, ⟨0,0,1⟩, ⟨0,1,0⟩, ⟨0,1,1⟩, ⟨1,0,0⟩, ⟨1,0,1⟩, ⟨1,1,0⟩, ⟨1,1,1⟩}

Сопоставив каждому из этих наборов значение функции 0 или 1, мы определим (выделим) конкретную б. функцию от 3-х аргументов.

Пример булевой функции от 3-х аргументов



Задать булеву функцию - это значит сопоставить наборам аргументов значение функциии.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

табличное задание

10

Булевы функции от 3-х аргументов

Булева функция от 3-х аргументов задаётся в 3-мерном булевом пространстве $\{0, 1\}^3$, т.е. наборы аргументов есть элементы прямого произведения

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} =$$

=⟨0,0,0⟩, ⟨0,0,1⟩, ⟨0,1,0⟩, ⟨0,1,1⟩, ⟨1,0,0⟩, ⟨1,0,1⟩, ⟨1,1,0⟩, ⟨1,1,1⟩}

Имеем $2^n = 8$ наборов аргументов. На этой области определения, в принципе, можно задать всего

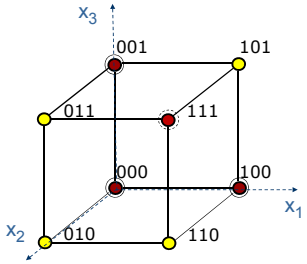
$$2^{2^3} = 256$$ булевых функций.

В качестве *примера* мы рассматриваем *лишь одну* из них.

11

Представление б. ф-ции в б. пространстве

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



В этом примере мы имеем дело с одной из 256 возможных булевых функций от трёх аргументов.

12

Формальное понятие булевой функции

Булева функция от n аргументов $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ задает отображение элементов (точек) n-мерного булева пространства $\{0, 1\}^n$ в 2-элементное множество $\{0, 1\}$.

При этом аргумент (булева переменная) x_i соответствует i-той координате булева пространства.

$$\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

Таким образом, булева функция такова, что как её аргументы, так и её значение могут быть равны либо 0, либо 1.

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n);$$
$$x \in \{0, 1\},\ y \in \{0, 1\}$$

Полностью определенная булева функция

Элементы n-мерного булева пространства $\{0, 1\}^n$ есть элементы прямого произведения

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}$$

(здесь предполагается, что $\{0, 1\}$ записано n раз)

Каждую n-ку (элемент прямого произведения) будем называть *набором аргументов* рассматриваемой булевой функции.

Задать булеву функцию - это значит сопоставить наборам аргументов значение функциии.

В случае, если функция *полностью определенная*, то каждому из $\mathbf{2^n}$ наборов аргументов соответствует либо **0**, либо **1**.

F.2. ПРИМЕНЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ (МОДЕЛИРОВАНИЯ) ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.

Пример 1: булева функция от двух аргументов

Рассмотрим сложение двух одноразрядных двоичных чисел (в двоичной системе счисления).

x_1		x_2		y_S	*перенос в след. разряд*
0	+	0	=	0	нет
0	+	1	=	1	нет
1	+	0	=	1	нет
1	+	1	=	0	есть

x_1	x_2	y_S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$y_S = f_S(x_1, x_2)$$

Здесь 0 и 1 двоичные числа числа.

В этой таблице 0 и 1 имена булеых констант.

Видим, что сумму двух одноразрядных двоичных чисел можно представить (промоделировать как булеву функцию.

Пример: булева функция от двух аргументов

Наличие переноса при сложении двух одноразрядных двоичных чисел тоже можно представить как булеву функцию.

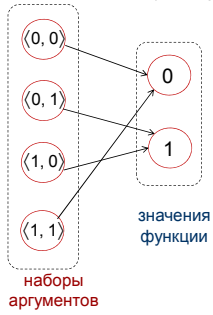
$$y_c = f_c(x_1, x_2)$$

x_1		x_2		y_S	*перенос в след. разряд (y_c)*
0	+	0	=	0	0
0	+	1	=	1	0
1	+	0	=	1	0
1	+	1	=	0	1

x_1	x_2	y_c
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример: функциональное соответствие

Здесь мы имеем отображение множества наборов аргументов (область определения) в множество значений (область значений) конкретной б.функции от 2-х аргументов.

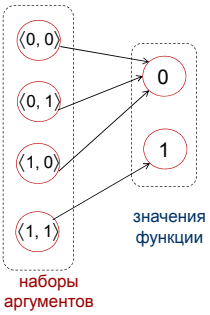


x_1	x_2	y_S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$y = f_S(x_1, x_2)$$

Пример: функциональное соответствие

Здесь мы имеем отображение множества наборов аргументов (область определения) в множество значений (область значений) конкретной б.функции от 2-х аргументов.



x_1	x_2	y_c
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$y = f_c\ (x_1, x_2)$

Сколько всего булевых ффункций от двух аргументов можно задать?

Пример дискр. системы: полусумматор

x_1	x_2	y_S	y_C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Мы имеем дискретную систему (полусумматор), поведение которой описывается (моделируется) двумя булевыми функциями (системой булевых функций).

F.3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Различные формы задания булевых функций

Описать (задать, определить, представить) функциональное соответствие множества двоичных наборов аргументов (облсти определения) и множества значений булевой функции можно различным образом.

Мы рассмотрим следующие формы представления булевых функций:

- Табличная
- Цифровая
- Геометрическая
- Карты Карно
- Алгебраическая

F.3.1 Табличная форма задания б. ф-и.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Здесь приведён пример табличного задания булевой функции от трёх аргументов (одна из возможных 256)

$y = f\ (x_1, x_2, x_3)$

Все булевы функции от 1-го аргумента

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- **f_1 - константа ноль**
  0
- **f_2 - повторение**
  x
- **f_3 - отрицание**
  $\overline{x}$ $\neg x$ x' ~x
- **f_4 - константа единица**
  1

Все булевы функции от 2-х аргументов

- f (x_1, x_2)
- Число аргументов n = 2
- Число наборов аргументов m = 2^n = 4
- Всего различных булевых функций от двух аргументов будет 2^m = 16

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Эту таблицу можно рассматривать как собранные воедино 16 таблиц описывающих все функции от двух аргументов.

Булевы функции от 2-х аргументов

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- **f_1** - константа ноль
  0
- **f_2** - конъюнкция, логическое умножение, И, AND
  $x_1 \& x_2$; $x_1 \wedge x_2$; $x_1 \bullet x_2$; $x_1 x_2$;
- **f_7** - исключающее или
  $x_1 \oplus x_2$

Булевы функции от 2-х аргументов

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- **f_8** - дизъюнкция, логическое сложение, ИЛИ, OR
  $x_1 \vee x_2$ $x_1 + x_2$
- **f_9** - стрелка Пирса, ИЛИ-НЕ, NOR
  $x_1 \downarrow x_2$
- **f_{10}** - эквиваленция, равнозначность
  $x_1 \Leftrightarrow x_2$ $x_1 \equiv x_2$ $x_1 \leftrightarrow x_2$

Булевы функции от 2-х аргументов

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- **f_{14}** - импликация
  $x_1 \Rightarrow x_2$ $x_1 \rightarrow x_2$ $x_1 \supset x_2$
- **f_{15}** - штрих Шеффера, И-НЕ, NAND
  $x_1 \uparrow x_2$
- **f_{16}** - константа единица
  1

F.3.2 Цифровая форма задания б-х ф-ций

x_1	x_2	x_3	y	Десятичный эквивалент набора аргументов
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	2
0	1	1	0	3
1	0	0	1	4
1	0	1	0	5
1	1	0	0	6
1	1	1	1	7

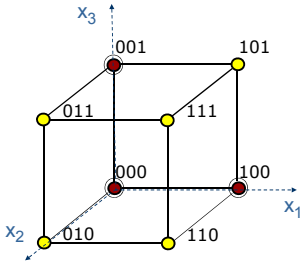
Σ **(0, 1, 4, 7)**

Π **(2, 3, 5, 6)**

F.3.3 Геометрическая форма задания

Возьмём одну из 256 возможных булевых функций от трёх аргументов и отобразим её на рисунке в 3-х мерном булевом пространстве.

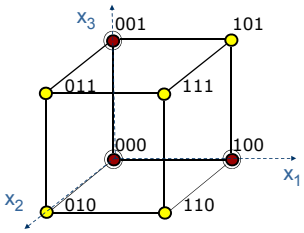
x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



31

Переход к геометрическму заданию б. ф-ции

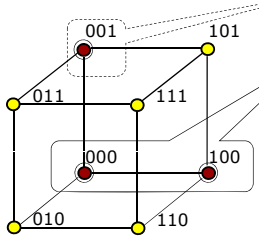
Опишем функцию, взятую в качестве примера и представленную таблицей, *иначе*. Поскольку функция полностью определённая, то достаточно описать те наборы аргументов, на которых функция равна 1 (поскольку на оставшихся она равна 0). Представим «единичные» наборы аргументов в виде *двоичной (булевой) матрицы.*



$$M^1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

32

Кубы (интервалы) булевого пространства



$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} - & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Кубы (интервалы, грани) соответсвенно нулевого порядка (булев или двоичный вектор) и первого порядка (троичный вектор)

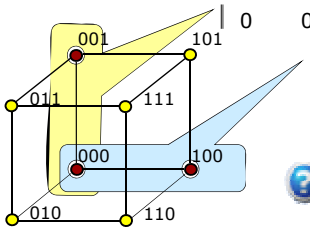
$$M^1 = \begin{Vmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

В данном случае функция задана посредством троичной матрицы или, как говорят, *геометрически.*

33

Кубы (интервалы) булевого пространства

Всего у этой функции имеется 3 интервала (куба) нулевого и 2 интервала первого порядка включающие в себя «единичные» точки булева пространства (наборы аргументов, на которых функция равна 1) и только их.



$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & - \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} - & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Сколько имеется таких интервалов состоящих из «нулевых» точек?

34

Пример 1 геометрического задания б. ф-ции

Геометрическое представление булевой функции есть задание её посредством *матрицы* (в общем случае, троичной). Например, рассматривемя нами функция может быть геометрически представлена различно (о чём и говорит знак равенства между ними).

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{Vmatrix}$$

Опишите данную функцию другими матрицами.

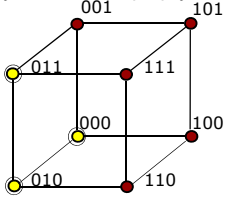
35

Пример 2 геометрического задания б. ф-и

Дана булева функция (отличная от данной в предыдущем примере), например, посредством матрицы M^1.

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

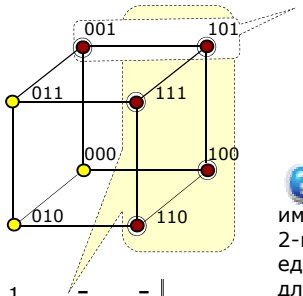
Тогда нетрудно представить её и поредством матрицы M^0, каждая строка которой есть «нулевой» набор аргументов.



$$M^0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

36

Кубы (интервалы) n-го порядка



$\| \; - \quad 0 \quad 1 \; \|$

1-куб или интервал 1-го порядка

$\| \; 1 \quad - \quad - \; \|$

2-куб или интервал 2-го порядка

Сколько всего имеется 0-кубов, 1-кубов, 2-кубов (интервалов) из единичных точек имется для данной булевой функции?

Кубы (интервалы) n-го порядка

Порядок куба (интервала) или его *размерность* определяются числом «-» в соответствующем ему троичном векторе.

Пусть имеется некоторый троичный вектор. Тогда троичный вектор интерпретируется как совокупность всех булевых векторов, которые получаются из него всевозможными подстановками значений 0 и1 вместо неопределённого значения «-». Если в троичном векторе имеется ***к*** значений «-», то он порождает таким образсм $\mathbf{2^{к}}$ булевых вектора.

Например,

$$\| \; 1 \quad - \quad - \; \| \;\Rightarrow\; \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Пример 2 геометрического задания б. ф-и

$$M^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} - & 0 & 1 \\ 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & - & - \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} - & 0 & 1 \\ 1 & - & - \end{Vmatrix}$$

Пример 2 геометрического задания б. ф-и

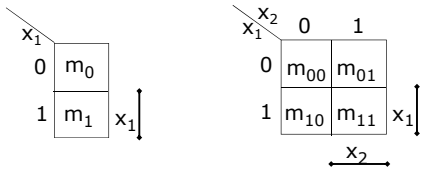
Поскольку данная функция полностью определённая можно однозначно задать её и описывая наборы аргументов (точки булева пространства), на которых функция равна 0.

$$M^0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & - \end{Vmatrix}$$

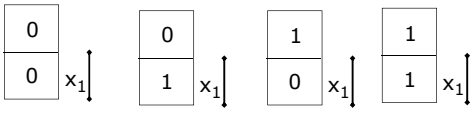
F.3.4 Задание булевых ф-ий картами Карно

Карты Карно для булевых функций от одного и двух аргументов



Карты Карно функций от 1-го аргумента

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1



Карты Карно функций от 2-х аргументов

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_8 (дизъюнкция)

0	1
1	1

x_1, x_2

f_9 (стрелка Пирса)

1	0
0	0

x_1, x_2

f_{10} (эквиваленция)

1	0
0	1

x_1, x_2

Карты Карно функций от 3-х аргументов

$f(x_1, x_2, x_3)$ $\quad m_{x1x2x3}=0(1)$

x_1 \ $x_2 x_3$	00	10	11	01
0	m_{000}	m_{010}	m_{011}	m_{001}
1	m_{100}	m_{110}	m_{111}	m_{101}

x_1, x_2, x_3

Карты Карно функций от 4-х аргументов

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\quad m_{x1x2x3x4}=0(1)$

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	m_{0000}	m_{0001}	m_{0011}	m_{0010}
10	m_{1000}	m_{1001}	m_{1011}	m_{1010}
11	m_{1100}	m_{1101}	m_{1111}	m_{1110}
01	m_{0100}	m_{0101}	m_{0111}	m_{0110}

x_1, x_2, x_3, x_4

F.3.5 Алгебраическая форма задания б. ф-й

Алгебраическая форма задания булевой функции есть ее представление в виде суперпозиции булевых функций от 1-го и 2-х аргументов.

Суперпозицией функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных, а ***формулой*** называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

$(x_1 \ \& \ x_2)$

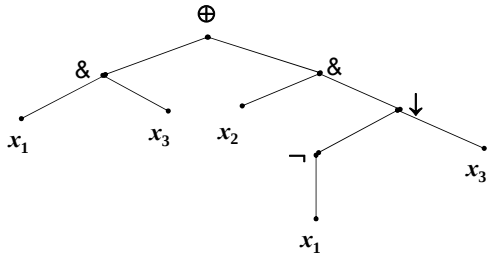
$\square \ \& \ \square$

$x_1 \vee x_2$ $\quad$ $x_3 \oplus x_4$

$((x_1 \vee x_2) \ \& \ (x_3 \oplus x_4))$

Структура формулы

$$(x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \ \& \ (\overline{(x_1)} \downarrow x_3))$$



Результаты выполнения основных операций

a	b	$a\&b$	$a\vee b$	$a\oplus b$	$a\Leftrightarrow b$	$a\Rightarrow b$	$a\uparrow b$	$a\downarrow b$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

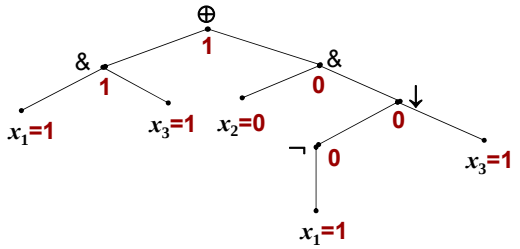
a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Структура порядка выполнения операций

$$(x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, (\overline{(x_1)} \downarrow x_3))$$

Найдём по формуле значение функции на наборе аргументов (при подстановке значений переменных) :

x_1=1, x_2=0, x_3=1.



Структура формулы (выполнения операций)

$$y=((x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, (\overline{(x_1)} \downarrow x_3)))$$

$y_1=(\overline{x_1})$

$y_2=(y_1 \downarrow x_3)$

$y_3=(x_2 \,\&\, y_2)$

$y_4=(x_1 \,\&\, x_3)$

$y=(x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, (y_1 \downarrow x_3))$

$y=(x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, y_2)$

$y=(x_1 \,\&\, x_3) \oplus y_3$

$y=(y_4 \oplus y_3)$

Структура формулы (выполнения операций)

$$y=((x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, (\overline{(x_1)} \downarrow x_3)))$$

$y_1=(\overline{x_1})$

$y_2=(y_1 \downarrow x_3)$

$y_3=(x_2 \,\&\, y_2)$

$y_4=(x_1 \,\&\, x_3)$

$y=(y_4 \oplus y_3)$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Структура формулы (выполнения операций)

$$y=((x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, (\overline{(x_1)} \downarrow x_3)))$$

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Функция и формулы

- О формуле, задающей функцию, говорят, что она *реализует* эту функцию.
- В отличие от табличного задания представление данной функции формулой не единственно.

Например, даны формулы

F1 = $(((x\&y) \vee ((x\&\overline{y})\&z)) \vee ((\overline{x}\&y)\&z))$

F2 = $(((x\&y) \vee (x\&z)) \vee (y\&z))$

Они задают одну и ту же функцию !

- Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными.*
- Методы установления эквивалентности формул и получения новых формул, эквивалентных исходным, называются *эквивалентными преобразованиями формул.*

F.3.5.1. Булева алгебра

Элементами абстрактной булевой алгебры являются булевы константы, булевы переменные и булевы операции (обычно рассматриваются только три операции - дизъюнкция, конъюнкция и отрицание). Булевых констант всего две, их принято обозначать 0 и 1. Они **не** рассматриваются как числа, и в принципе для их обозначения можно использовать любые другие символы. Значениями булевых переменных могут служить только булевы константы.

Основные свойства булевых операций

- Коммутативность

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ $\qquad$ $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$

- Ассоциативность

$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ $\qquad$ $(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3)$

- Дистрибутивность

$x_1 \vee (x_2 \& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$ $\qquad$ $x_1 \& (x_2 \vee x_3) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_3)$

- Двойное отрицание

$\overline{\overline{x}} = x$

- Свойства констант

$x \vee 0 = x$ $\qquad$ $x \& 1 = x$

$x \vee 1 = 1$ $\qquad$ $x \& 0 = 0$

$\overline{1} = 0$ $\qquad$ $\overline{0} = 1$

Основные свойства булевых операций

- Закон “исключения третьего” $\qquad$ Закон противоречия

$x \vee \overline{x} = 1$ $\qquad$ $x \& \overline{x} = 0$

- Идемпотентность

$x \& x = x$ $\qquad$ $x \vee x = x$

- Правила де Моргана

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2}$ $\qquad$ $\overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

Обобщённые законы де Моргана (теоремы):

$$\overline{x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \ldots \vee \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \ldots \& \overline{x_n}$$

Доказательство равносильности формул

Покажем верность закона ДеМоргана

$$((\neg x_1) \vee (\neg x_2)) = (\neg (x_1 \& x_2))$$

построив соотвествующие им таблицы

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$\neg (x_1 \& x_2)$	$(\neg x_1) \vee (\neg x_2)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Булева алгебра логических функций

Алгебра (P_2; $\vee$, &, $\neg$), основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание называется <u>булевой алгеброй логических функций.</u>

В рассмотренных ранее свойствах (теоремах) булевых операций в качестве переменных могут выступать логические (булевы) функции, а в качестве констант 0 и 1 соответственно тождественно ложные (всегда равные 0) и тождественно истинные (всегда равные 1) функции.

Несущественная переменная

- Переменная $\mathbf{x_i}$ в функции

  $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{x_i}, x_{i+1}, \ldots x_n)$

  называется несущественной (или фиктивной), если

  $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1} \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

  при любых значениях остальных переменных, т. е. если изменение значения x_i в любом наборе аргументов не меняет значения функции.
- В результате удаления фиктивной пременной получаем функцию

  $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

  от **n-1** переменной.
- Функции **f** и **g** по определению считаются равными.

Вычисление значений по формуле

Для установления порядка выполнения операций в формулах используются скобки. Для упрощения записи формул

1) устанавливают приоритет выполнения операций:
   - первым приоритетом обладает операция «отрицание»,
   - затем выполняется конъюнкция,
   - третьим приоритетом обладают операции «дизъюнкция» и «исключающее или»,
   - четвёртым приоритетом – операции «эквиваленция» и «импликация».
2) часто символ конъюнкции опускается

Поглощение, склеивание, элиминация

- Абсорбция (законы поглощения)

$(F \& G) \vee G = G$ $\qquad$ $(F \vee G) \& G = G$

- Законы склеивания

$(F \& x) \vee (F \& \overline{x}) = F$ $\qquad$ $(F \vee x)\&(F \vee \overline{x}) = F$

- Элиминация

$F \Rightarrow G = \overline{F} \vee G$

$F \Leftrightarrow G = (F \Rightarrow G) \& (G \Rightarrow F)$

$F \oplus G = F \& \overline{G} \vee \overline{F} \& G = (F \vee G) \& (\overline{F} \vee \overline{G})$

F.3.5.2. Эквивалентные преобразования

Приведенные эквивалентные соотношения позволяют производить *эквивалентные преобразования формул*.

Будем называть *термом* (или *подформулой*) любую часть формулы, являющуюся, в свою очередь, формулой.

Пример

Даны формулы $\quad F1 = (((x\&y) \vee ((x\&\overline{y})\&z)) \vee ((\overline{x}\&y)\&z))$

$F2 = (((x\&y) \vee (x\&z)) \vee (y\&z))$

Покажем, что они задают одну и ту же функцию.

$(((\mathbf{x\&y}) \vee ((x\&\overline{y})\&z)) \vee ((\overline{x}\&y)\&z))$

$= \mathbf{x\,y} \vee \mathbf{x\,y\,z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z =$ $\qquad$ абсорбция

$= x\,y \vee x\,(y \vee \overline{y})z \vee \overline{x}\,y\,z =$ $\qquad$ дистрибутивность

$= x\,y \vee x\,\mathbf{1}\,z \vee \overline{x}\,y\,z =$ $\qquad$ “исключение 3-го”

$= \mathbf{x\,y} \vee x\,z \vee \overline{x}\,y\,z =$

$= \mathbf{x\,y} \vee \mathbf{x\,y\,z} \vee xz \vee \overline{x}\,y\,z =$ $\qquad$ абсорбция

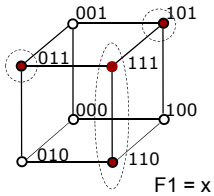
$= x\,y \vee x\,z \vee (x \vee \overline{x})\,y\,z =$ $\qquad$ дистрибутивность

$= x\,y \vee xz \vee \mathbf{1}y\,z =$ $\qquad$ “исключение 3-го”

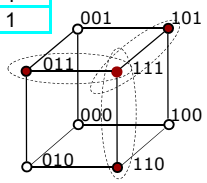
$= x\,y \vee x\,z \vee y\,z$

Иллюстрация приведённого примера

x	y	z	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$F1 = x\,y \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z$



$F2 = x\,y \vee x\,z \vee y\,z$

Глобальная подстановка термов

Подстановка в формулы, находящиеся в отношении равносильности, любого терма вместо *всех* вхождений некоторой переменной сохраняет отношение равносильности между ними.

Например, подстановка вместо переменной x

терма (подформулы) $\overline{(a \vee b)}$

в равносильные формулы $\overline{\overline{x} \& y}$ и $x \vee \overline{y}$

приводит к равносильным же формулам

$$\overline{((a \vee b) \& y)} = \overline{a \vee b} \vee \overline{y}$$

Равносильность сохраняется, если все до одного вхождения переменной заменяются одним и тем же термом.

Двустороннее отрицание

Равносильные формулы при их отрицании порождают также равносильные формулы, т.е. которые задают одну и ту же булеву функцию.

Если $A = B$, то $\overline{A} = \overline{B}$

Принцип двойственности

Булева функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ равная $\overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$ называется *двойственной* функцией по отношению к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для получения таблицы истинности двойственной функции достаточно в таблице истинности исходной функции заменить значения всех переменных на противоположные, т.е. все единицы заменить на нули, а нули – на единицы.

Функции двойственные равносильным функциям также равносильны.

Таким образом, производя замену вхождений элементов {0, 1, &, ∨} на {1, 0, ∨, &} в равносильных формулах, получаем равносильные же формулы.

Правило замены терма (подформулы)

При замене в формуле любого терма на равносильный получается формула, равносильная исходной.

Например, при замене в формуле $\overline{((a \vee b) \& y)}$

терма (подформулы) $(a \vee b)$

на равносильный ему (в соответствии с законом деМоргана) терм $\overline{(\overline{a} \& \overline{b})}$

отношение равносильности сохраняется

$$\overline{((a \vee b) \& y)} = \overline{\overline{\overline{a} \& \overline{b}} \& y}$$

(см. слайд 52)

$$\overline{((a \vee b) \& y)} = \overline{\overline{\overline{a} \& \overline{b}} \& y} = (\overline{a} \& \overline{b}) \vee \overline{y} = \overline{a \vee b} \vee \overline{y}$$

Пример (равносильные преобразования)

Упростим формулу $(b \Rightarrow a) \& ((b \oplus 1) \& \overline{c} \Leftrightarrow c)$

Ниже приведены равносильные преобразования термов, использующие соотношения,приведённые справа.

$(b \Rightarrow a) \& ((b \oplus 1) \& \overline{c} \Leftrightarrow c) =$

$= (\overline{b} \vee a) \& ((b \oplus 1) \& \overline{c} \Leftrightarrow c) =$

$= (\overline{b} \vee a) \& (\overline{b} \& \overline{c} \Leftrightarrow c) =$

$= (\overline{b} \vee a) \& (\overline{\overline{\overline{b} \& \overline{c}} \& \overline{c}} \vee (\overline{b} \& \overline{c} \& c)) =$

$= (\overline{b} \vee a) \& ((b \vee c) \& \overline{c})$

$= (\overline{b} \vee a) \& (b \& \overline{c}) =$

$= a \& b \& \overline{c}$

элиминация операции ⇒

$b \Rightarrow a = \overline{b} \vee a$

элиминация операции ⊕

$b \oplus 1 = \overline{b}$

элиминация операции ⇔

$(\overline{b} \& \overline{c}) \Leftrightarrow c =$

$= (\overline{\overline{b} \& \overline{c}} \& \overline{c}) \vee (\overline{b} \& \overline{c} \& c) =$

$= (b \vee c) \& \overline{c} = b \& \overline{c}$

F.3.5.3. Нормальные формы

Разновидность алгебраического задания логических (булевых) функций.

- *Элементарными конъюнкциями (дизъюнкциями)* называются конъюнкции (дизъюнкции) переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная встречается не более одного раза.
- Каждому набору аргументов (точке булева пространства), на котором функция равна 1 , можно однозначно сопоставить *полную* элементарную конъюнкцию (*конституент* булевой функции, конституент единицы).

  Полная – означает, что в этой элементарной конъюнкции встречаются все аргументы данной функции.

Совершенные нормальные формы

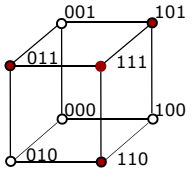
- Каждому набору аргументов (точке булева пространства), на котором функция равна 0 можно однозначно сопоставить полную элементарную дизъюнкцию (антиконституент булевой функции).
- Дизъюнкция всех конституентов булевой функции образует ее *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ).
- Конъюнкция всех антиконституентов булевой функции образует ее *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ).
- *Теорема.* Любая булева функция имеет единственную СДНФ и единственную СКНФ (каноническое представление).

Конституэнты и антикоституэнты б. ф-ции

x_1	x_2	x_3	y	Консти-туэнты	Антикон-ституэнты
0	0	0	0		$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	0		$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
0	1	0	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
0	1	1	1	$\overline{x_1} \& x_2 \& x_3$	
1	0	0	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	1	$x_1 \& \overline{x_2} \& x_3$	
1	1	0	1	$x_1 \& x_2 \& \overline{x_3}$	
1	1	1	1	$x_1 \& x_2 \& x_3$	

Построение СДНФ и СКНФ

x_1	x_2	x_3	y	Конституэнты	Антиконстит.
0	0	0	0		$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	1	0		$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
0	1	0	0		$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	1	$\overline{x}_1 \& x_2 \& x_3$	
1	0	0	0		$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	1	1	$x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3$	
1	1	0	1	$x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$	
1	1	1	1	$x_1 \& x_2 \& x_3$	



$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \& (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \& (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \quad (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \quad (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$(\overline{x}_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3) \vee (x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3) \vee (x_1 \& x_2 \& x_3)$

$\overline{x}_1\ x_2\ x_3 \quad \vee \quad x_1\ \overline{x}_2\ x_3 \quad \vee \quad x_1\ x_2\ \overline{x}_3 \quad \vee \quad x_1\ x_2\ x_3$

Понятие СДНФ и СКНФ

$$\underbrace{A_1}_{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)} \& \underbrace{A_2}_{(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)} \& \underbrace{A_3}_{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)} \& \underbrace{A_4}_{(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)}$$

$$\underbrace{B_1}_{(\overline{x}_1 \& x_2 \& x_3)} \vee \underbrace{B_2}_{(x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3)} \vee \underbrace{B_3}_{(x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3)} \vee \underbrace{B_4}_{(x_1 \& x_2 \& x_3)}$$

Чтобы понять суть представления функции в СКНФ (СДНФ) надо лишь помнить, что элементарная конъюнкция (дизъюнкция) равна 1 (0) только на одном наборе аргументов.

ДНФ

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Каждая функция может быть задана в виде ДНФ, причем их может быть и несколько (т.е. равных между собой).

Ниже приведены 3 ДНФ реализующие одну и ту же б. функцию (в этом легко убедиться, например, описав их в форме таблицы, т. е. вычислив значение функции для всех наборов аргументов, или алгебраически, применив законы склеивания и поглощения).

$\overline{x}_1\ x_2\ x_3 \vee x_1\ \overline{x}_2\ x_3 \vee x_1\ x_2\ \overline{x}_3 \vee x_1\ x_2\ x_3$

$\overline{x}_1\ x_2\ x_3 \vee x_1\ \overline{x}_2\ x_3 \vee x_1\ x_2$

$x_2\ x_3 \vee x_1\ x_3 \vee x_1\ x_2$

Пример алгебраического перехода к ДНФ

упрощение записи формулы

$y = ((x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& ((\overline{x_1}) \downarrow x_3))) =$

$= x_1 \& x_3 \oplus x_2 \& (\overline{x_1} \downarrow x_3) =$

$= x_1 x_3 \oplus x_2 (\overline{x_1} \downarrow x_3) =$

элиминация $\downarrow$

$= x_1\ x_3 \oplus x_2 (\overline{\overline{x_1} \vee x_3}) =$

элиминация $\oplus$

$= x_1 x_3\ \overline{x_2 (\overline{\overline{x_1} \vee x_3})} \vee \overline{x_1 x_3}\ x_2 (\overline{\overline{x_1} \vee x_3}) =$

з. ДеМоргана

$= x_1 x_3 (\overline{x_2} \vee (\overline{\overline{x_1} \vee x_3})) \vee (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})\ x_2 (\overline{\overline{x_1}}\ \overline{x_3}) =$

двойное отрицание, законы противоречия и дистрибутив.

$= x_1 x_3 (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) \vee \overline{x_1}\, x_2 (x_1 \overline{x_3}) \vee \overline{x_3}\, x_2 (x_1 \overline{x_3}) =$

$= x_1 x_3 (\overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee x_3) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} =$

$= x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1\ x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}$

Пример алгебраического перехода к СДНФ

Нетрудно по полученной ДНФ перейти к табличному заданию данной функции.

Теперь преобразуем полученную ДНФ в СДНФ.

$x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1\ x_3 \vee x_1 x_2\ \overline{x_3} =$

$= x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1\ 1\ x_3 \vee x_1 x_2\ \overline{x_3} =$

$= x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1 (x_2 \vee \overline{x_2})\, x_3 \vee x_1 x_2\ \overline{x_3} =$

$= x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2\ \overline{x_3} =$

$= x_1 \overline{x_2}\ x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2\ \overline{x_3}$

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

По таблице также видно, что $x_1 \overline{x_2}\ x_3$, $x_1 x_2 \overline{x_3}$ и $x_1\ x_2\ x_3$ являются конституентами рассматриваемой функции.

Связь между СДНФ и СКНФ

$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\ x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\ x_2\ \overline{x_3} \vee x_1\ x_2\ x_3$

x_1	x_2	x_3	Minterm	y	$\overline{y}$
0	0	0	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	0	1
0	0	1	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\ x_3$	1	0
0	1	0	$\overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}$	1	0
0	1	1	$\overline{x_1}\ x_2\ x_3$	0	1
1	0	0	$x_1\ \overline{x_2}\,\overline{x_3}$	1	0
1	0	1	$x_1\ \overline{x_2}\ x_3$	0	1
1	1	0	$x_1\ x_2\ \overline{x_3}$	1	0
1	1	1	$x_1\ x_2\ x_3$	1	0

$\overline{y} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\ x_2 x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\ x_3$

$\overline{\overline{y}} = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\ x_2 x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\ x_3}$

$y = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}}\ \overline{\overline{x_1}\ x_2 x_3}\ \overline{x_1\,\overline{x_2}\ x_3}$

$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

Интервалы и элементарные конъюнкции

Каждому интервалу булева пространства содержащего только точки (наборы аргументов), на которых заданная функция равна 1, можно сопоставить элементарную конъюнкцию, которая принимает значение 1 на всех этих наборах и только на них.

$$\| 0\ 1\ -1 \| \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \bar{x}_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4 \\ \bar{x}_1\ x_2\ x_3\ x_4 \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x}_1\ x_2\ x_4$$

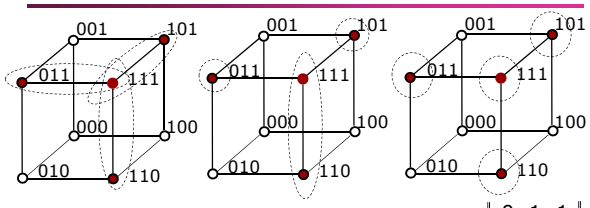
Или путём алгебраических преобразований

$$\bar{x}_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4 \vee \bar{x}_1\ x_2\ x_3\ x_4 = \bar{x}_1\ x_2\ x_4\ (\bar{x}_3 \vee x_3) =$$

$$= \bar{x}_1\ x_2\ x_4\ 1 = \bar{x}_1\ x_2\ x_4$$

79

ДНФ и комплексы кубов



$$\bar{x}_1\ x_2\ x_3 \vee x_1\ \bar{x}_2\ x_3 \vee x_1\ x_2\ \bar{x}_3 \vee x_1\ x_2\ x_3$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\bar{x}_1\ x_2\ x_3 \vee x_1\ \bar{x}_2\ x_3 \vee x_1\ x_2$$

$$x_2\ x_3 \vee x_1\ x_3 \vee x_1\ x_2 \quad \begin{Vmatrix} - & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & - \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - \end{Vmatrix}$$

80

Интервалы и элементарные дизъюнкции

Каждому интервалу булева пространства содержащего только точки (наборы аргументов), на которых заданная функция равна 0, можно сопоставить элементарную дизъюнкцию, которая принимает значение 0 на всех этих наборах и только на них.

$$\| 0\ 1\ - \| \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \\ (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1 \vee \bar{x}_2)$$

Или путём алгебраических преобразований

$$(x_1 \vee \bar{x}_2) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \vee (x_3 \,\&\, \bar{x}_3) =$$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \,\&\, (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

81

КНФ

Аналогично ДНФ определяется и *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ) как конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Каждая функция может быть задана в виде КНФ, причем их может быть и несколько.

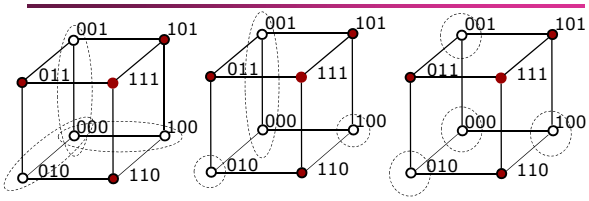
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$$

82

КНФ и комплексы кубов



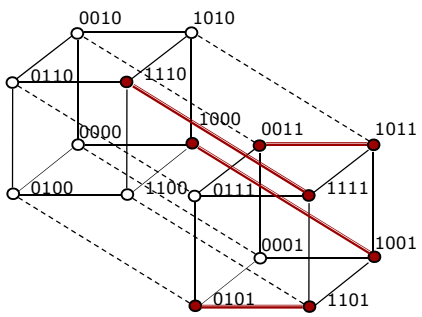
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & - & 0 \\ - & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

83

Минимальное кубическое покрытие



$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{Vmatrix}$$

84

F.3.5.4 Разложение Шеннона

Разложение Шеннона по одной переменной

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \boldsymbol{x_i}, x_{i+1}, \dots x_n) =$$

$$= \boldsymbol{x_i} \,\&\, f(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} \,\&\, f(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

остаточные функции

Аналогичное разложение справедливо для любой из n переменных.

Пример разложения по одной переменной

Дана формула

$$y = x_1(x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4) \vee x_2 x_4 (\bar{x}_1 x_3 \vee x_1)$$

Выполним разложение по переменной x_1

$$y = x_1 [1 (x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4) \vee x_2 x_4 (\bar{1} x_3 \vee 1)] \vee$$

$$\vee \bar{x}_1 [0 (x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4) \vee x_2 x_4 (\bar{0} x_3 \vee 0)] =$$

$$= x_1 [x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 x_4] \vee \bar{x}_1 [x_2 x_3 x_4]$$

Разложение Шеннона по двум переменным

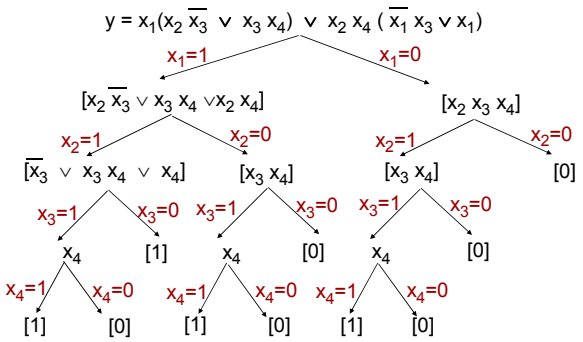
Разложение Шеннона по двум произвольным переменным $\boldsymbol{x_i}$ и $\boldsymbol{x_k}$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \boldsymbol{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, \boldsymbol{x_k}, x_{k+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \boldsymbol{x_i x_k} f(x_1, \dots, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \dots, x_n) \vee \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x_k} f(x_1, \dots, \mathbf{0} \dots, \mathbf{1}, \dots, x_n) \vee$$

$$\vee \boldsymbol{x_i} \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} f(x_1, \dots, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{0}, \dots, x_n) \vee \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} f(x_1, \dots, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \dots, x_n)$$

Представление функции бинарным графом



Теорема Шеннона

В общем случае функция может быть разложена по произвольному числу её аргументов.

Для литерала введём обозначение x^{σ},

где $x^{\sigma} = x$ при $\sigma = 1$ и $x^{\sigma} = \bar{x}$ при $\sigma = 0$.

Тогда $x^{\sigma} = 1$, если $x = \sigma$, и $x^{\sigma} = 0$, если $x \neq \sigma$.

Теорема Шеннона. Любая булева функция при любом m ($1 \le m \le n$) может быть представлена в следующем виде

$$y = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

Теорема. В результате разложения по всем n аргументам получим СДНФ заданной функции.

F.3.5.5 Функционально полные системы

Система функций Σ называется *функционально полной системой*, если любая логическая функция может быть представлена формулой над Σ, т. е. является суперпозицией функций из Σ.

Любая логическая функция может быть представлена в виде ДНФ или КНФ, а следовательно,

$$\Sigma_1 = \{\&, \vee, \neg\}$$

является функционально полной системой

Функционально полные системы

В соответствии с законом ДеМоргана

$a \,\&\, b = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$

Применяя закон Де Моргана нетрудно показать, что функционально полной является система

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$$

Анологично в соответствии с законом ДеМоргана

$a \vee b = \overline{\bar{a} \,\&\, \bar{b}}$

Применяя закон Де Моргана нетрудно показать, что функционально полной является также система

$$\Sigma_3 = \{\&, \neg\}$$

91

Функционально полные системы

Более того функционально полными являются следующие две системы

$$\Sigma_4 = \{\downarrow\}$$

$$\Sigma_5 = \{\uparrow\}$$

Нетрудно заметить, что $\bar{x} = x \oplus 1$ (например, построив истинностные системы). Поэтому функционально полной является также система

$$\Sigma_6 = \{\&, \oplus, 1\}$$

92

F.3.5.6 Алгебра Жегалкина (Read-Muller)

Алгебра логических функций в базисе ограниченном 2-мя операциями & и $\oplus$ называется алгеброй Жегалкина.

Свойства операций $\oplus$ и &:

- $x \oplus y = y \oplus x$ (операция $\oplus$, как и &, коммутативна)
- $x (y \oplus z) = x y \oplus x z$ (дистрибутивность & относительно $\oplus$)
- $x \oplus x = 0$ (чётное число термов может быть сокращено)
- $x \oplus 0 = x$ (нуль-термы могут быть сокращены)

Справедливо:

$x \oplus y = \bar{x} y \vee x \bar{y}$

$\bar{x} = x \oplus 1$

$x \vee y = \overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x y \oplus x \oplus y$

93

Полиномы Жегалкина (Read-Muller)

$$f \vee g = f g \oplus f \oplus g$$

Если $f \,\&\, g = 0$ (говорят, что f ортогональна g), то $f \vee g = f \oplus g$

Поэтому, когда исходная формула – СДНФ, мы можем выполнить эквивалентное преобразование, заменив знаки дизъюнкции на знаки $\oplus$ (“сумма по модулю 2” или “исключающее ИЛИ”).

Если в произвольной формуле алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все возможные упрощения, то получится формула в виде полинома по модулю 2 (сумма произведений). Такая формула называется *полиномом Жегалкина* для данной функции, который является единственным (каноническое представление).

94

Пример 1 построения полинома Жегалкина

Функция дана посредством ДНФ: $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$

Если принять, что $f = x_1 x_2$ и $g = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, то здесь мы имеем тот случай, что $f \,\&\, g = 0$ (действительно, $x_1 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0$).

$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 x_2 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 =$

$= x_1 x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) =$

$= x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus 1 x_2 \oplus x_1 1 \oplus 1 =$

$= 0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 =$

$= x_1 \oplus x_2 \oplus 1$

95

Пример 2 построения полинома Жегалкина

Функция задана формулой $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_1 x_3)$. Требуется представить её полиномом Жегалкина.

$(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_1 x_3) =$

$= (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2)(\bar{x}_2 x_1 x_3 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_1 x_3) =$

$= x_1 x_2 \bar{x}_2 x_1 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_1 x_3 \oplus x_2 \bar{x}_2 x_1 x_3 \oplus$

$\oplus x_1 x_2 \bar{x}_2 \oplus x_1 \bar{x}_2 \oplus x_2 \bar{x}_2 \oplus$

$\oplus x_1 x_2 x_1 x_3 \oplus x_1 x_1 x_3 \oplus x_2 x_1 x_3 =$

$= 0 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 \oplus 0 \oplus 0 \oplus x_1 \bar{x}_2 \oplus 0 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$

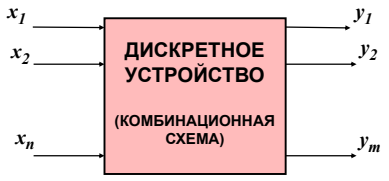
$= x_1(x_2 \oplus 1) x_3 \oplus x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_1 x_3 =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1$

96

F.4.
СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

F.4.1 Комбинационные схемы



x, y – двоичные (логические) переменные

$x, y \in \{0, 1\}$

$\{0, 1\}^n \Rightarrow \{0, 1\}^m$

F.4.2 Поведенческое описание к. с.

Поведенческим описанием (моделью) комбинационной схемы (логической схемы без памяти) является система булевых функций.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

$$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$$

F.4.3 Логические элементы

Логический элемент – дискретное устройство, физически реализующее элементарную булеву функцию.

Инвертор

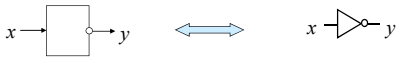
x	y
0	1
1	0

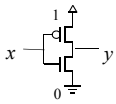
$y = \overline{x}$

«НЕ» «NOT»

Инвертор

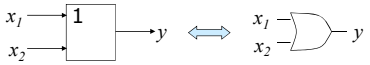
Символ:





Стоимость: 2 транзистора

Логические элементы “ИЛИ” и “ИЛИ-НЕ”

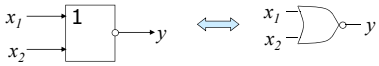


x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$y = x_1 \vee x_2$

Стоимость: 6 транзисторов

«ИЛИ» «OR»

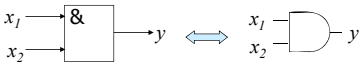


x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$y = \overline{x_1 \vee x_2}$

Стоимость: 4 транзистора «ИЛИ-НЕ» «NOR»

Логические элементы “И” и “И-НЕ”

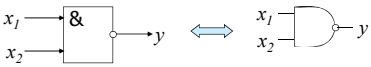


x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$y = x_1 \,\&\, x_2$

Стоимость: 6 транзисторов

«И» «AND»

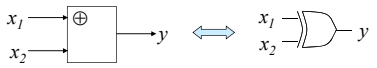


x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$y = \overline{x_1 \,\&\, x_2}$

Стоимость: 4 транзистора «И-НЕ» «NAND»

Логические элементы “XOR” и “XNOR”

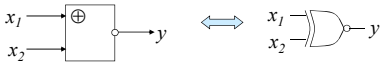


x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$y = x_1 \oplus x_2$

Стоимость: 14 транзисторов

«Искл. ИЛИ» «XOR»

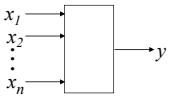


x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

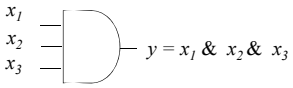
$y = \overline{x_1 \oplus x_2}$

«XNOR»

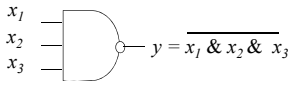
n - входовые логические элементы



Пример: 3-входовые элементы «И» и «И-НЕ»



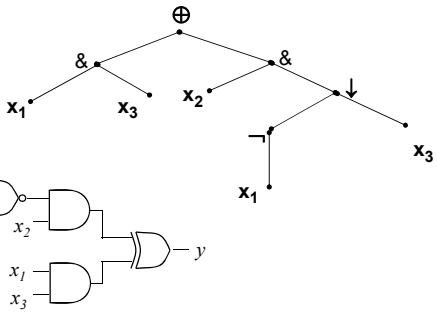
$y = x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3$



$y = \overline{x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3}$

Соответствие структур формулы и схемы

$(x_1 \,\&\, x_3) \oplus (x_2 \,\&\, ((\overline{x_1}) \downarrow x_3))$



Пример: полусумматор

A B Sum Carry

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 0 и перенос 1

$$\begin{cases} \text{Sum} = \overline{A} \,\&\, B \vee A \,\&\, \overline{B} = A \oplus B \\ \text{Carry} = A \,\&\, B \end{cases}$$

A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

F.4.3 Логический синтез (полусумматора)

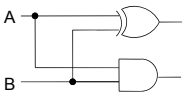
A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

коституэнт СДНФ

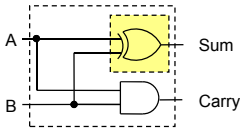
$\overline{A} \,\&\, B$

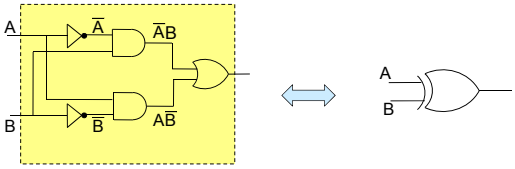
$A \,\&\, \overline{B}$

$$\begin{cases} \text{Sum} = \overline{A} \,\&\, B \vee A \,\&\, \overline{B} = \\ \quad = A \oplus B \\ \text{Carry} = A \,\&\, B \end{cases}$$



Синтез полусумматора в различном базисе





Пример: ONE'S COUNT

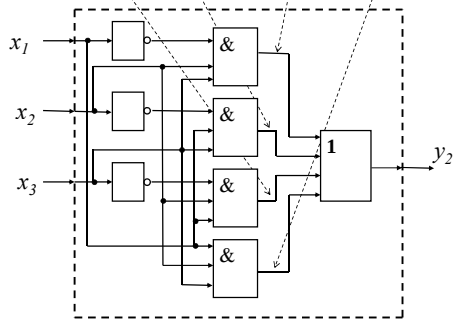
Устройство подсчитывает число единиц (в двоичной системе) в 3-компонентном двоичном векторе.

x_3	x_2	x_1	y_2	y_1	число единиц
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	2
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	2
1	1	0	1	0	2
1	1	1	1	1	3

$$\begin{cases} y_1 = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_1 \vee \overline{x_3}\,x_2\,\overline{x_1} \vee x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} \vee x_3\,x_2\,x_1 \\ y_2 = \overline{x_3}\,x_2\,x_1 \vee x_3\,\overline{x_2}\,x_1 \vee x_3\,x_2\,\overline{x_1} \vee x_3\,x_2\,x_1 \end{cases}$$

ONE'S COUNT - структурное описание (синтез)

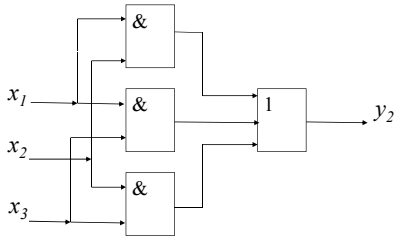
$$y_2 = \overline{x_3}\,x_2\,x_1 \vee x_3\,\overline{x_2}\,x_1 \vee x_3\,x_2\,\overline{x_1} \vee x_3\,x_2\,x_1$$



Оптимизация (минимизация) реализации

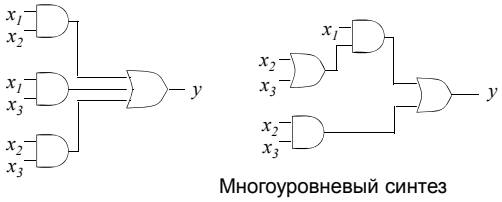
$$y_2 = \overline{x_3}\,x_2\,x_1 \vee x_3\,\overline{x_2}\,x_1 \vee x_3\,x_2\,\overline{x_1} \vee x_3\,x_2\,x_1 =$$

$$= x_2\,x_1 \vee x_3\,x_1 \vee x_3\,x_2$$



Скобочное и многоуровневое представление

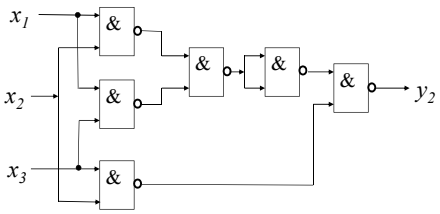
$$x_2\,x_1 \vee x_3\,x_1 \vee x_3\,x_2 = x_1\,(x_2 \vee x_3) \vee x_3\,x_2$$



Многоуровневый синтез

(исходя из скобочного представления булевой функции)

Синтез в ограниченном базисе (И-НЕ)

$$y_2 = x_2\,x_1 \vee x_3\,x_1 \vee x_3\,x_2 =$$

$$= \overline{\overline{\overline{x_2\,x_1}\;\&\;\overline{x_3\,x_1}}\;\&\;\overline{x_3\,x_2}}$$