L.
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

L.1.
ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ)

Alexander Sudnitson
Tallinn University of Technology

L.1.1. Понятие высказывания. Связки.

- Под высказыванием следует понимать каждое предложение (суждение), в отношении которого имеет смысл утверждать, что его содержание либо истинно, либо ложно (но не то и другое одновременно).
- С конкретным высказыванием связывается его истинностное значение:

ИСТИНА	и	ЛОЖЬ
И		Л
1		0

Примеры истинных высказываний

- «Волга впадает в Каспийское море.»
- «математика есть наука.»
- «2 меньше 3.»
- «8 есть наибольший общий делитель 24 и 16.»

Являются ли эти фразы высказываниями ?

Да.

Чему равно истинностное значение ?

И

Примеры ложных высказываний

- «Таллинн в 2003 году был столицей России.»
- «снег-чёрный.»
- «9 есть простое число.»

Являются ли эти фразы высказываниями ?

Да.

Чему равно истинностное значение ?

Л

Являются ли эта фраза высказ-нием ?

«Девушка была очень красивой.»

Нет. Почему?

Эта фраза не является ни истинной, ни ложной. Она приобретает истинностное значение только в локализованной ситуации.

«Все люди смертны.»

Да.

Чему равно истинностное значение ?

И

Является ли эта фраза высказ-нием ?

- « $y > 5$.»

Нет. Почему ?

Мы можем определить истинностное значение только после придания конкретного значения. Такое выражение мы называем пропозициональной (высказывательной) функцией.

- «$x < y$ если и только если $y > x$.»

Да. Почему ?

Потому, что истинностное значение не зависитот конкретных значений y и x .

Чему равно истинностное значение ? **И**

Является ли эта фраза выска-нием ?

- «Не спите на лекциях !»

  Нет. Почему ?

  Это не повествовательное предложение.
- « Я в думал да. »

  Нет. Предложение хоть и повествовательное,

  но не свзное. Отсутствует смысл.
- «Я утверждаю, что я всегда лгу.»

  Нет. Это парадокс.

7

Пропозициональная переменная. Атом.

- Мы рассматриваем высказывания только как величины,принимающие значения *И* и *Л*. Пропозициональная (высказывательная) переменная есть произвольное высказывание и для их обозначения будем употреблять большие латинские буквы: *P, Q, R, …, X, Y, Z*
- Символы, которые используются для обозначения высказываний, называются также атомами. Атом рассматривается как единое целое. Его структура и состав не анализируются.
- Из атомов строятся формулы.

8

Составные (сложные) высказывания

- Высказывания могут определенным образом соединяться в новые высказывания (составные, сложные высказывания).
  - «2 *НЕ* меньше 3»
  - «математика есть наука *ИЛИ* снег-чёрный »
- Для выражения логической связи высказываний мы вводим следующие 5 знаков (логических или пропозициональных связок): $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности и ложности составляющих высказываний, а не от их содержания.

9

Связки

Рассматривая высказывания как величины, принимающие значения *И* и *Л*, мы определим над ними операции, которые позволяют из данных высказываний получать новые.

- $\neg X$ (читается «*не X*») обозначает всказывание, которое истинно, если *X* ложно, и ложно, если *X* истинно.
- *X&Y* (читается «*X и Y*») обозначает всказывание, которое истинно в том и только в том случае, если как *X*, так и *Y* истинны.

10

Связки

- $X \vee Y$ (читается «*X или Y*») обозначает всказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из двух высказываний *X*, *Y* является истинным.
- $X \rightarrow Y$ (читается «*если X то Y*») обозначает всказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда *X* истинно и *Y* ложно
- $X \leftrightarrow Y$ (читается «*X равнозначно Y*») обозначает всказывание, которое тогда и только тогда истинно, когда *X* и *Y* оба истинны или *X* и *Y* оба ложны.

11

Отрицание (НЕТ)

Унарный оператор, Символ: $\neg$

P	$\neg$P
истина	ложь
ложь	истина

Другие обозначения: ~P, ^P, P′, $\overline{P}$

12

Конъюнкция (И)

Бинарный оператор, Символ: **&**

P	Q	P&Q
истина	истина	истина
истина	ложь	ложь
ложь	истина	ложь
ложь	ложь	ложь

Другие обозначения: P∧Q, P•Q, P Q, P and Q, P и Q

13

Дизъюнкция (ИЛИ)

Бинарный оператор, Символ: ∨

P	Q	P∨Q
истина	истина	истина
истина	ложь	истина
ложь	истина	истина
ложь	ложь	ложь

Другие обозначения: P **+** Q, P or Q, P или Q

14

Исключающее или (XOR)

Бинарный оператор, Символ: ⊕

P	Q	P⊕Q
истина	истина	ложь
истина	ложь	истина
ложь	истина	истина
ложь	ложь	ложь

15

Импликация (если - то)

Бинарный оператор, Символ: →

P	Q	P→Q
истина	истина	истина
истина	ложь	ложь
ложь	истина	истина
ложь	ложь	истина

Другие обозначения: P ⇒ Q, P ⊃ Q

16

Эквиваленция (если и только если)

Бинарный оператор, Символ: ↔

P	Q	P↔Q
истина	истина	истина
истина	ложь	ложь
ложь	истина	ложь
ложь	ложь	истина

Другие обозначения: P ~ Q, P ⇔ Q, P ≡ Q

17

L.1.2. Синтаксис исч-ия высказываний.

- Алфавит есть список букв или символов данного алфавита.
- Алфавит исчичсления высказываний: атомы, 5 логических связок и круглые скобок ( ).
- Правила построения, описывают те выражения, которые являются объектами языка (такие выражения есть ***формулы***). Фраза - это составное высказывание, построенное по определенным правилам.
- Подформулой формулы А называется любое подслово слова А, которое само является формулой.

18

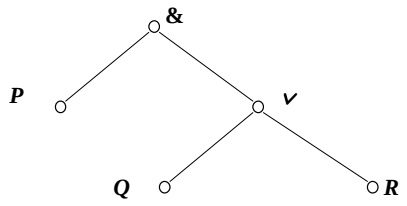
Формулы - объекты языка

- *Правильно построенные формулы* (или короче-*формулы*) рекурсивно определяются следующим образом:
  - Атом есть формула
  - Если G – формула, то $(\neg G)$ – формула
  - Если G и H – формулы, то $(G \& H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$ и $(G \leftrightarrow H)$ – формулы
  - Никаких формул, кроме порождённых применением указанных выше правил – нет

19

Древовидность структуры формулы

- Скобки указывают порядок, в котором применялись шаги построения формулы, и их употребление связано с древовидностью структуры формулы.
  - Пример $(P \& (Q \vee R))$



20

Приоритет логических связок

Для упрощения записи формул

1) устанавливают приоритет применения логических связок: первым приоритетом обладает «отрицание», затем выполняется конъюнкция, третьим приоритетом обладают логические операции «дизъюнкция» и «исключающее или», четвёртым приоритетом – «эквиваленция» и «импликация».
2) часто символ конъюнкции опускается

Например,

$(P \rightarrow ((Q \& (\neg R)) \vee S))$ можно записать, как $P \rightarrow Q \& \neg R \vee S$

21

L.1.3. Семантика исч-ия высказываний

- Семантика придаёт определённое значение фразам языка (формулам).
- Мы рассматриваем логику высказываний безотносительно к её связям с фразам естественного языка.
- Значение истинности формулы зависит только от структуры этой формулы и от значений истинности составляющих её высказываний. Связки представляют собой функции истинности (Булевы функции, функции алгебры логики).

22

Метод таблиц истинности

- Семантика формулы (составного высказывания) может быть определена методом истинностных таблиц
  - Пример: дана формула $((\neg P) \vee (\neg Q))$

P	Q	¬ P	¬ Q	(¬P)∨(¬Q)
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

23

Итерпретация

- Пусть F - данная пропозициональная формула и $A_1, A_2, \ldots A_n$ - её атомы. Тогда *интерпретацией* формулы F является такое приписывание истинностных значений атомам $A_1, A_2, \ldots A_n$, при котором каждому из A_i приписано либо *И*, либо *Л* (но не оба вместе).
- Если в некоторой формуле имеется ***n*** различных атомов, то у этой формулы будет $\mathbf{2^n}$ различных интерпретаций.

24

Выполнимость

- Если формула *F* истинна при интерпретации *I*, то мы говорим, что *I удовлетворяет F*, или *F выполнена в интерпретации I.*
- Если формула *F* ложна при интерпретации *I*, то мы говорим, что *I опровергает F*, или *F опровергается в интерпретации I.*
- Когда интерпретация *I* удовлетворяет формуле *F*, *I* называется *моделью F .*
- Говорят, что формула *выполнима* тогда и только тогда, когда она истинна хотя бы при одной из своих интерпретаций.

25

Тавтология

- Говорят, что формула *общезначима* (*тавтология*), тогда и только тогда, когда она истинна при всех возможных интерпретациях.
  - Пример: покажем общезначимость формулы $(\neg(P\&Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q))$ используя метод истинностных таблиц

P	Q	$\neg(P\&Q)$	$(\neg P)\vee(\neg Q)$	$\neg(P\&Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

26

Правило *одновременной подстановки*

- Правило *одновременной подстановки* (очень простое средство порождения тавтологий):
  - если *X* – тавтология, *p* – высказывание и *A* – формула, то выражение, получаемое из *X* в результате одновременной замены всех вхождений *p* на *A* в *X*, является тавтологией.

27

Противоречие

- Говорят, что формула *противоречива* (*невыполнима*) тогда и только тогда, когда она ложна при всех возможных интерпретациях.
  - Пример. Покажем, что формула $((P\&Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q))$ противоречива, используя метод истинностных таблиц

P	Q	$(P\wedge Q)$	$(\neg P)\vee(\neg Q)$	$(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

28

L.1.4. Равносильные преобразования

- Мы рассматриваем логику высказываний безотносительно к их содержанию и структуре.
- Говорят, что две формулы *F* и *G равносильны* или *логически эквивалентны* (обозначается $F = G$) тогда и только тогда, когда истинностные значения *F* и *G* совпадают при каждой интерпретации *F* и *G*.
- Между понятием равносильности и связкой эквиваленции $\leftrightarrow$ существует следующая связь: формулы *F* и *G* равносильны тогда и только тогда, когда формула $(F \leftrightarrow G)$ есть тавтология.

29

Равносильные высказывания

Рассмотрим высказывания $\neg(P\wedge Q)$ и $(\neg P)\vee(\neg Q)$

P	Q	$\neg(P\wedge Q)$	$(\neg P)\vee(\neg Q)$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Высказывания $\neg(P\wedge Q)$ и $(\neg P)\vee(\neg Q)$

равносильны (логичекски эквивалентны)

и $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P)\vee(\neg Q)$ всегда истинно.

30

$P \to Q = \neg P \vee Q$

Логические операции ($\leftrightarrow$, $\to$, $\vee$,. &, $\neg$) не являются независимыми друг от друга. Одни из них могут быть выражены через другие так, что при этом получаются равносильные формулы. Например, знак $\to$ может быть выражен через знаки $\vee$ и $\neg$. Проверить это можно путём рассмотрения истинностной таблицы.

P	Q	¬P	¬P ∨ Q	P → Q
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$F \leftrightarrow G = (F \to G) \,\&\, (G \to F)$

F	G	(F→G)	(G→F)	(F → G) & (G → F)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

F	G	F ↔ G
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Законы (пары равносильных формул)

Нам нужен достаточный запас пар равносильных формул, чтобы проводить преобразования формул (как и в обычной “школьной” алгебре).

Следующие пары равносильных формул (свойства операций) могут быть доказаны методом истинностных таблиц.

- Коммутативность

$F \vee G = G \vee F$ ‖ $F \,\&\, G = G \,\&\, F$

- Ассоциативность

$(F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$ ‖ $(F \& G) \& H = F \& (G \& H)$

- Дистрибутивность

$F \vee (G \& H) = (F \vee G) \& (F \vee H)$ ‖ $F \& (G \vee H) = (F \& G) \vee (F \& H)$

Законы (пары равносильных формул)

❑ обозначает формулу, которая всегда ложна

■ обозначает формулу, которая всегда истинна

$F \vee ❑ = F$ ‖ $F \,\&\, ■ = F$

$F \vee ■ = ■$ ‖ $F \,\&\, ❑ = ❑$

- Закон исключения третьего

$F \vee \neg F = ■$

Закон противоречия

‖ $F \,\&\, \neg F = ❑$

Законы (пары равносильных формул)

- Законы деМоргана

$\neg(F \vee G) = \neg F \,\&\, \neg G$ ‖ $\neg(F \,\&\, G) = \neg F \vee \neg G$

- Закон двойного отрицания

$\neg(\neg F) = F$

L.1.5. Логические следствия. Дедукция

- Если *A* – формула, то запись $\models A$ означает, что *A* есть тавтология.
- Если *E* есть множество формул, то запись $E \models A$ означает, что при всех интерпретациях, при которых <u>все</u> формулы из *E* истинны, истинна также формула *A*. Тавтология есть логическое следствие из пустого множества формул.
- Формула *A* называется *логическим следствием из E*.
- *<u>Проблема дедукции:</u>* определить является ли формула *C* логическим следствием конечного множества формул *E*.

Логические следствия (пример)

- Даны формулы:
- F1 : $(P \to Q)$ F2 : $\neg Q$ C : $\neg P$
- Покажем, что C есть логическое следствие F1 и F2 методом истинностных таблиц.

P	Q	$(P \to Q)$	$\neg Q$	$(P \to Q) \& \neg Q$	$\neg P$
1	1	1	0	0	***0***
1	0	0	1	0	***0***
0	1	1	0	0	***1***
0	0	1	1	1	***1***

C истинна в каждой модели формулы

$(P \to Q) \& \neg Q$, т. е. $\{F1, F2\} \models C$

Логическая эквивалентность

- Если E содержит единственный элемент B, то пишут $B \models A$ вместо $\{B\} \models A$.
- <u>Утверждение.</u> A является логическим следствием из B если и только, если импликация $(B \to A)$ есть тавтология.

$$B \models A \Leftrightarrow \models (B \to A)$$

- Если формулы A и B – логические следствия друг друга, то они являются *логически эквивалентными*. В этом случае формула $(A \leftrightarrow B)$ является тавтологией.

Гипотеза, заключение, теорема

- В общем случае

$\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \models C \Leftrightarrow \models (H_1 \& H_2 \&, \dots, \& H_n) \to C$

- Формулы $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ называют *гипотезами*, а формулу C - *заключением.*
- Если C есть логическое следствие формул $H_1, H_2, \dots, H_n$, то формула

  $((H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \to C)$

  часто называется *теоремой*, а C называется *заключением теоремы.*

  При этом $((H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \to C)$ есть общезначимая формула.

Пример доказательства теоремы

- Даны формулы:
- F1 : $(P \to Q)$ F2 : $\neg Q$ C : $\neg P$
- покажем, что (F1&F2) $\to$ C общезначима, построением таблицы

P	Q	$(P \to Q)$	$\neg Q$	$(P \to Q) \& \neg Q$	$\neg P$	$((P \to Q) \& \& \neg Q) \to \neg P$
1	1	1	0	0	0	***1***
1	0	0	1	0	0	***1***
0	1	1	0	0	1	***1***
0	0	1	1	1	1	***1***

$((P \to Q) \& \neg Q) \to \neg P$ есть тавтология

Логический вывод

Мы рассмотрели возможный путь доказательства, который состоит в построении таблицы истинности с целью проверки является ли сложное высказывание (булева функция) тавтологией.

Однако при большом числе гипотез построение таблицы становится громоздким, а такой путь доказательства не эффективным (а иногда и практически невозможным).

В общем случае, доказательство утверждений можно рассматривать как последовательность истинных высказываний, логически следующих друг из друга. Некоторые из этих высказываний истинны изначально, другие могут быть аксиомами или ранее доказанными теоремами, а также гипотезами, являясь посылками теоремы.

Правила вывода (rules of inference)

Одним из путей построения доказательств является использование т. н. правил вывода.

Правила вывода служат для построения доказательств из высказываний, которые являются или предполагаются истинными (гипотезы, аксиомы, ранее доказанные теоремы).

Одним из правил вывода являются правила подстановки: в формуле любую её подформулу можно можно заменить на равносильную ей, при этом получаемая формула равносильна исходной. Например, тавтология так и останется тавтологией.

Далее приведены правила вывода как логические следствия, а также как тавтологии.

Правила вывода (rules of inference)

$$\frac{P}{(P \vee Q)}$$

$\models P \to (P \vee Q)$

Здесь мы полагаем, что P – истинно, а поэтому и $(P \vee Q)$ является истинным высказыванием. Это может быть представлено как и соответствующая тавтология (вспомним определение импликации).

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}$$

modus ponens: Исходя из того, что высказывания P и $P \to Q$ – истинны, делаем заключение, что Q – истинно.

$\models (P\&(P \to Q)) \to Q$

modus ponens

$\{P, (P \to Q)\} \models Q$

modus ponens

Правила вывода (rules of inference)

$$\frac{\neg Q \quad P \to Q}{\neg P}$$

modus tollens: Исходя из того, что высказывания $\neg Q$ и $P \to Q$ – истинны, делаем заключение, что $\neg P$ – истинно.

$\{\neg Q, (P \to Q)\} \models \neg P$

modus tollens

$\models (\neg Q\&(P \to Q)) \to \neg P$

modus tollens

$\{(P \vee Q), (\neg P)\} \models Q$

disjunctive syllogism

$\models (P \vee Q)\&(\neg P) \to Q$

disjunctive syllogism

$\{(P \to Q), (Q \to R)\} \models (P \to R)$

hypothetical syllogism

$\models ((P \to Q)\&(Q \to R)) \to (P \to R)$

hypothetical syllogism

Правила вывода (тавтологиии)

$\models \neg P \to (P \to Q)$ — «из ложного что угодно»

$\models P \to (Q \to P)$ — «истина из чего угодно»

$\models (P \,\&\, Q) \to P$ — закон упрощения

$\models P \to (P \vee Q)$ — закон добавления

Замечание к обозначениям

- Если S→T есть тавтология, то часто используется запись S⇒T.
- Если S↔T есть тавтология, то часто используется запись S⇔T.
  В данном случае символ ⇔ означает фразу “тогда и только тогда, когда”
- Обычно это видно из контекста

Постановка логической задачи (пример)

Если лошадь летает или корова ест мясо, то муха - птица. Если муха – птица, соль сладкая. Но соль не сладкая. Следовательно корова не ест мясо.

Первые три высказывания являются гипотезами, а последнее – заключением. Проверим, следует ли истинность заключения из истинности гипотез.

Для этого первым делом надо выделить встречающиеся простые высказывания (атомы), которые формально обозначим через:

p – «лошадь летает»
q – «корова ест мясо»
r – «муха – птица»
s – «соль - сладкая»

Пример логического вывода

Гипотезы: 1. $(p \vee q) \to r$ Заключение: $\neg q$
2. $r \to s$
3. $\neg s$

Проведём доказательство, используя гипотезы и правила вывода (в доказательстве слева показаны заключения, справа – порождающие его гипотезы и правила вывода).

(1)	$(p \vee q) \to r$	гипотеза 1
(2)	$r \to s$	гипотеза 2
(3)	$(p \vee q) \to s$	(1), (2) и закон силлогизма
(4)	$\neg s$	гипотеза 3
(5)	$\neg(p \vee q)$	(3), (4) и закон modus tollens
(6)	$\neg p \,\&\, \neg q$	(5) и закон ДеМоргана
(7)	$\neg q$	(6), коммутативность и закон упрощения

Подходы к доказательству теорем

Сформулируем два основных, по сути одинаковых утверждения.

- Утверждение 1. Пусть даны формулы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и формула C. Тогда C есть логическое следствие $H_1, H_2, \ldots, H_n$ если и только, если формула

  $((H_1 \& H_2 \& \ldots \& H_n) \rightarrow C))$ общезначима.
- Утверждение 2. Пусть даны формулы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и формула C. Тогда C есть логическое следствие $H_1, H_2, \ldots, H_n$ если и только, если формула

  $(H_1 \& H_2 \& \ldots \& H_n \& \neg C)$ противоречива.

Условие невыполнимости

- Заметим, что множество E невыполнимо если и только, если *Ложь* есть его логическое следствие. Символически:

$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \models C \Leftrightarrow \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C\} \models$ *Ложь*

❑

L.1.6. Нормальные формы

Рассматриваемые в дальнейшем подходы к доказательству теорем основаны на построении нормальных форм (ДНФ и КНФ) для функций (сложных высказываний), начальные формулы которых получены на основе Утверждения 1 и Утверждения 2. Определим понятия ДНФ и КНФ.

- Формула, которая есть пропозициональная переменная (атом) или отрицание переменной, называется литералом. Произвольная конъюнкция (дизъюнкция) литералов называется конъюнктом или элементарной конъюнкцией (дизнъюнктом или элементарной дизъюнкцией).

Нормальные формы

- Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется произвольная дизъюнкция конъюнктов, а конъюнктивной нормальной формой (КНФ) - произвольная конъюнкция дизъюнктов.
- ДНФ (КНФ) А называется совершенной и обозначается СДНФ (СКНФ), если каждая переменная формулы А входит с отрицанием или без отрицания в каждый конъюнкт (дизъюнкт) точно один раз.

Пустые нормальные формы

- Единственный невыполнимый дизъюнкт – пустой дизъюнкт.
- ❑ - Формула, которая всегда ложна
- ■ - Формула, которая всегда истинна
- Пустая КНФ эквивалентна ■ (пустое множество дизъюнктов).
- Пустая ДНФ эквивалентна ❑ (пустое множество конъюнктов).

Переход к нормальным формам

- Всякая формула может быть преобразована в нормальную форму путём использования соответствующих законов.

Эскиз процедуры преобразования:

- Шаг 1. Применение элиминации (устранения логических связок $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$.
- Шаг 2. Многократное использование законов двойного отрицания и деМоргана.
- Шаг 3. Использование законов исключения третего и дистрибутивности. Устранение избыточных членов.

Доказательство преобразованием к КНФ

Этот подход основан на Утверждении 1, в соответствии с которым мы плучаем исходную формулу, от которой будем стремиться перейти к КНФ, т. е. строить дизъюнкты. Если мы в конце концов получим непустой дизъюнкт (т. е. не содержащий пару противоположных литер), то это означает, что исходная формула не является тождественно истинной, а следовательно теорема не верна. В противном случае имеем конъюнкцию от пустого множесва (ведь нам не удалось построить ни одного непустого дизъюнкта), а следовательно исходная фомула тождественно истинна (Утверждение 1 верно).

55

Пример

- Даны формулы:
- F1 : $(P \to Q)$
- F2 : $\neg Q$
- C : $\neg P$
- Покажем, что C есть логическое следствие F1 и F2.

56

Пример (преобразование к КНФ)

$((P \to Q) \& \neg Q) \to \neg P =$

$= \neg((P \to Q) \& \neg Q) \vee \neg P =$

$= \neg((\neg P \vee Q) \& \neg Q) \vee \neg P =$

$= \neg((\neg P \& \neg Q) \vee (Q \& \neg Q)) \vee \neg P =$

$= \neg((\neg P \& \neg Q) \vee \square) \vee \neg P =$

$= \neg((\neg P \& \neg Q)) \vee \neg P =$

$= (P \vee Q) \vee \neg P =$

$= (Q \vee P) \vee \neg P = Q \vee \blacksquare =$

$= \blacksquare$

57

Доказательство преобразованием к ДНФ

Этот подход основан на Утверждении 2, в соответствии с которым мы плучаем исходную формулу, от которой будем стремиться перейти к ДНФ, т. е. строить конъюнкты. Если мы в конце концов получим непустой конъюнкт (т. е. не содержащий пару противоположных литер), то это означает, что исходная формула не является тождественно ложной, а следовательно теорема не верна. В противном случае имеем диъюнкцию от пустого множесва (ведь нам не удалось построить ни одного непустого конъюнкта), а следовательно исходная фомула тождественно ложна (Утверждение 2 верно).

58

Пример (преобразование к ДНФ)

Исходя из *утверждения 2* покажем, что формула

$((P \to Q) \& \neg Q) \& \neg(\neg P) = ((P \to Q) \& \neg Q) \& P$

противоречива, путём преобразования в ДНФ.

Пустая ДНФ эквивалентна $\square$ (пустое множество конъюнктов).

$((P \to Q) \& \neg Q) \& P =$

$= (\neg P \vee Q) \& \neg Q \& P =$

$= (\neg P \& \neg Q \& P) \vee (Q \& \neg Q \& P) =$

$= \square \vee \square =$

$= \square$

59

Пример (см. Утверждение 1)

Вернёмся к задаче «Если лошадь летает …»

Гипотезы представляются следующими сложными высказываниями (формулами)

$(p \vee q) \to r$

$r \to s$

$\neg s$

Заключение описывается формулой

$\neg q$

Требуется доказать, что высказывание, представляемое формулой

$(((p \vee q) \to r) \& (r \to s) \& \neg s) \to \neg q$

является тавтологией.

60

Пример (Утверждение 1)

Проведём доказательство исходя из утверждения 1, доказывая общезначимость функции заданной формулой $(((p \vee q) \to r) \,\&\, (r \to s) \,\&\, \neg s) \to \neg q$.

Для этого будем стремиться перейти от данной формулы к КНФ.

$(((p \vee q) \to r) \,\&\, (r \to s) \,\&\, \neg s) \to \neg q =$ элиминация

$= \neg((\neg(p \vee q) \vee r) \,\&\, (\neg r \vee s) \,\&\, \neg s) \vee \neg q =$ з. ДеМоргана (многократно)

$= ((\,(p \vee q) \,\&\, \neg r) \vee (r \,\&\, \neg s) \vee s) \vee \neg q =$

$= (((p \vee q) \,\&\, \neg r) \vee (r \vee s \vee \neg q) \,\&\, (\neg s \vee s \vee \neg q) =$

$= ((\,(p \vee q) \,\&\, \neg r) \vee (r \vee s \vee \neg q\,) =$ дистрибутивность, з. искл-я третьего

$= ((p \vee q \vee r \vee s \vee \neg q) \,\&\, (\neg r \vee r \vee s \vee \neg q)) = \blacksquare$

61

Резолюция

Полезно знать о такой операции, которая известна под именем *резолюции* и часто используется в методах доказательства теорем (в системах искусственного интеллекта). Резолюция является операцией обратной к операции обобщённого склеивания. Она применяется к смежным термам (эл. конъюнкциям), в которых присутствует ровно одна переменная, входящая в один терм с отрицанием, а в другой – без отрицания.

$$x\, k_i \vee \overline{x}\, k_j = k_i\, k_j \vee x\, k_i \vee \overline{x}\, k_j$$

Терм $k_i\, k_j$ называется *резольвентой.*

62

Пример (утверждение 2)

Проведём доказательство исходя из утверждения 2, доказывая противоречивость функции заданной формулой $(((p \vee q) \to r) \,\&\, (r \to s) \,\&\, \neg s) \,\&\, \neg(\neg q)$.

Для этого будем стремиться перейти от данной формулы к ДНФ.

$(((p \vee q) \to r) \,\&\, (r \to s) \,\&\, \neg s) \,\&\, \neg(\neg q) =$ элиминация, з. двойного отр-я

$= (\neg(p \vee q) \vee r) \,\&\, (\neg r \vee s) \,\&\, \neg s \,\&\, q =$

$= ((\neg p \,\&\, \neg q) \vee r) \,\&\, (\neg r \vee s) \,\&\, \neg s \,\&\, q =$ з. ДеМоргана

$= ((\neg p \,\&\, \neg q) \vee r) \,\&\, (\neg r \,\&\, \neg s \,\&\, q) \vee (s \,\&\, \neg s \,\&\, q) =$

$= (\neg p \,\&\, \neg q \,\&\, \neg r \,\&\, \neg s \,\&\, q) \vee (r \,\&\, \neg r \,\&\, \neg s \,\&\, q) =$

$= \square$ дистрибутивность, з. противоречия

63

L.2. Логика первого порядка

Логика предикатов

Раздел мат. логики, в котором описываются выводы, учитывающие внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру суждений.

Является расширенным вариантом логики высказываний.

Предикатное исчисление позволяет нам делать дедуктивное заключение (силлогизм), примером которого может быть следующее умозаключение.

Все люди смертны Сократ есть человек	посылки
Сократ - смертен	заключение

64

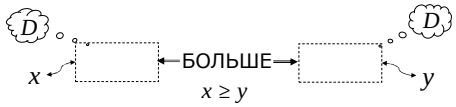
L.2.1 Предикаты

Предикат (от лат. proedicatum), в грамматике - сказуемое.

Предикат - языковое выражение, обозначающее какое-то свойство или отношение.

Предикат, указывающий на свойство отдельного предмета (напр., “быть человеком”) называется одноместным предикатом.

Предикат, обозначающий отношение, называется двухместным, трёхместным и т. д., в зависимости от числа членов данного отношения (напр., “больше”)



65

Предикаты

В современной логике предикация рассматривается как частный случай функциональной зависимости.

Можно сказать, что предикатом называются функции (пропозициональные), значениями которых служат высказывания.

БОЛЬШЕ (x, y) $\qquad$ P(x, y)

Предикат становится высказыванием, если все переменные связаны путём

- присваивания им конкретных значений из *предметной области* D
- их квантирования

66

Пример

Пусть D есть Z = {. . . -2, -1, 0 , 1, 2, 3, . . .}

P(x): x > 0 есть предикат.

Он приобретает истнностное значение только если переменная x будет связанной, например

- P(-3) есть ложь,
- P(0) есть ложь,
- P(3) есть истинна.

Совокупность объектов (целых чисел), для которых P(x) истинно, образует множество натуральных чисел.

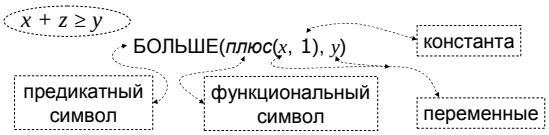
- $P(y) \vee \neg P(0)$ же не является высказыванием. Переменная y не является связанной.
- В то время $P(3) \vee \neg P(0)$ есть высказывание.

Задание предикатов

Чтобы задать *n*-местный предикат P(x_1, ... , x_n), следует указать множества D_1, ... ,D_n , области изменения *предметных переменных* x_1, ... , x_n, причём обычно $D_1 = D_2 = \ldots = D_n$.

С теоретико- множественной точки зрения предикат определяется заданием подмножества *M* в декартовом произведении $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$. При этом P($a_1$, ... ,$a_n$) понимают как высказывание «упорядоченный набор < a_1, ... , a_n > принадлежит *M*»

L.2.2 Термы



Термы определяются рекурсивно следующим образом:

- Константа есть терм
- Переменная есть терм
- Если *f* есть *n* -местный функциональный символ и t_1, t_2, ... , t_n - термы, то f(t_1, t_2, ... , t_n) есть терм.
- Никаких термов, кроме порождённых применением указанных выше правил, нет.

L.2.3 Кванторы

Quantum - сколько.

Квантор - показатель квантитета.

Общее название для логических операций, которые по предикату P(x) строят высказывание характеризующее область истинности предиката P(x). В мат. логике ниболее употребительны *квантор всеобщности* ∀ и *квантор существования* ∃.

Высказывание ∀xP(x) означает, что область истинности предиката P(x) совпадает с облатью значений переменной x.

Высказывание ∃(x)P(x) означает, что область истинности предиката P(x) не пуста.

Квантор всеобщности

$P(x)$ есть истина для всех объектов из предметной области.

- Обозначение: $\forall x\, P(x)$
- Читается: ‘Для всех x, $P(x)$ ’,
- Переменная x связана квантором всеобщности и тем самым получаем высказывание.
- Квантор всеобщности можно рассматривать как обобщение конъюнкции (что удобно, если предметная область конечна).

Пример.
$D = \{ 1, 2, 3 \}$
$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(1)\ \&\ P(2)\ \&\ P(3)$

Квантор существования

- $P(x)$ есть истина для некоторого x из предметной области.
- Обозначение: $\exists x P(x)$

Читается:

- ‘Существует x такой, что $P(x)$’
- ‘Для некоторого x, $P(x)$’
- ‘По крайней мере для одного x, P(x)’

- Квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции (что удобно, если предметная область конечна).

Пример.
$D=\{1, 2, 3\}$
$\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3)$

Область действия квантора

Обратим внимание на то, что $\forall x[F(x) \vee S(x)]$, не совпадает по смыслу с $\forall x[F(x)] \vee \forall x[S(x)]$

Если P есть *n*-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ есть термы, тогда $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть атом.

Атомы с использованием логических связок и кванторов образуют формулы.

Определим область действия квантора, входящего в формулу, как ту формулу, к которой этот квантор применяется.

Область действия квантора существования в формуле $\forall x \exists y P(x, y)$ есть $P(x, y)$, а область действия квантора всеобщности есть формула $\exists y P(x, y)$.

73

Пример

Пусть $D = \mathrm{R}$ (реальные числа) и $P(x,y)$: $x\,y = 0$.
Тогда

$\forall x \forall y P(x, y)$	ложь
$\forall x \exists y P(x, y)$	истина
$\exists x \forall y P(x, y)$	истина
$\exists x \exists y P(x, y)$	истина

Вопрос: что будет, если $P(x,y)$ есть $x/y=1$?

Помни!
Предикатное выражение не является высказыванием (не имеет истинностного значения до тех пор пока ***все*** его переменные будут связаны квантированием (навешиванием квантора) или приписыванием конкретного значения.

74

Квантор уникального существования

- $P(x)$ есть истина для одного и только одного x из предметной области.
- Обозначение: $\exists! x\ P(x)$
- Читается:
  - ‘Существует единственный x такой, что $P(x)$,’
  - ‘Существует один и только один x такой, что $P(x)$’

75

Пример

Пример: $D = \{ 1, 2, 3 \}$
Выражение $\exists! x\ P(x)$ может быть представлено посредством таблиы истинности (что возможно поскольку область конечна):

P(1)	P(2)	P(3)	∃!xP(x)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

76

Кванторы на конечной области

В случае <u>конечной</u> предметной области любую формулу логики предикатов можно привести в формулу, состоящую из предикатов, соединённых знаками логических операций.
Истинность такой формулы <u>на конечной области</u> проверяется <u>конечным</u> числом подстановок и вычислений.

<u>Пример.</u>

Пусть $D = \{1,2,3\}$. Рассмотрим предикат $\forall x \exists y P(x, y)$.

Связывая переменные путём подстановки получим:

$$\exists y P(1, y)\ \&\ \exists y P(2, y)\ \&\ \exists y P(3, y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [P(1, 1) \vee P(1, 2) \vee P(1, 3)]\ \&$$
$$\&\ [P(2, 1) \vee P(2, 2) \vee P(2, 3)]\ \&\ [P(3, 1) \vee P(3, 2) \vee P(3, 3)]$$

77

L.2.4 Интерпретация в логике 1-го п-ка

Интерпретация формулы логики первого порядка состоит из предметной области *D*, указания «оценки» (значения) всех констант, функциональных символов и предикатных символов, встречающихся в формуле.

Каждой константе мы ставим в соответствие некоторый элемент из *D*.

Каждому n-местному функциональному символу мы ставим в соответствие отображение из D^n в *D*.

Каждому n-местному предикатному символу мы ставим в соответствие отображение из D^n в { И, Л }.

$$D^n = \{ < x_1, \ldots, x_n > \mid x_1 \in D, \ldots, x_n \in D \}$$

78

Пример 1 интерпретации

Рассмотрим формулу $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

Определим интерпретацию следующим образом:

$D = \{1, 2\}$

$P(1, 1)$	$P(1, 2)$	$P(2, 1)$	$P(2, 2)$
И	*Л*	*Л*	*И*

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ есть *И* в данной интерпретации.

79

Пример 2 интерпретации

Рассмотрим формулу $(\forall x)\ (P(x) \to Q(f(x), a))$

Определим интерпретацию следующим образом:

$D = \{1, 2\}$

Оценка для a:

a
1

Оценка для f:

$f(1)$	$f(2)$
2	1

Оценка для P:

$P(1)$	$P(2)$
Л	*И*

Оценка для Q:

$Q(1, 1)$	$Q(1, 2)$	$Q(2, 1)$	$Q(2, 2)$
И	*И*	*Л*	*И*

$(\forall x)\ (P(x) \to Q(f(x), a))$ есть *И* в данной.интерпретации.

80

L.2.5 Общезначимость и выполнимость

- Утверждение содержащее предикаты является *общезначимым* если оно тождественно истинно для любой интерпретации (предметной области).
- Утверждение содержащее предикаты является *выполнимым*, если существует предметная область и интерпретация на ней такая, что утверждение является истинным иначе оно является *невыполнимым*.
- Область действия квантора есть часть выражения, в которой переменные связаны этим квантором.

  Примеры:

  общезначимо: $\forall x\ \neg S(x) \leftrightarrow \neg\exists x S(x)$

  не общезначимо, но выполнимо: $\forall x\ [F(x) \to T(x)]$

  невыполнимо: $\forall x\ [F(x)\ \&\ \neg F(x)]$

81

L.2.6 Схемы (свойства) формул

- одноименные кванторы можно поменять местами
- $\forall x\ \forall y\ P(x, y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ P(x, y)$
- Но не верно, что

  $\forall x\ \exists y\ P(x, y) \Leftrightarrow \exists y\ \forall x\ P(x, y)$??
- ***Законы деМоргана*** в исчислении предикатов:

  $\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$

  $\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$

  $\forall x\ F(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg F(x)$

  $\forall x\ \neg S(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ S(x)$

82

Схемы (свойства) формул

- $\forall x[F(x) \to S(x)] \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \forall x[\neg F(x) \vee S(x)] \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \forall x\neg[F(x)\ \&\ \neg S(x)] \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \neg\exists x[F(x)\ \&\ \neg S(x)]$
- $\exists x[F(x)\ \&\ T(x)] \Leftrightarrow \neg\forall x[\neg F(x) \vee \neg T(x)]$
- $\forall x[S(x) \to \neg T(x)] \Leftrightarrow \neg\exists x[S(x)\ \&\ T(x)]$
- $\forall x[(F(x)\ \&\ S(x)) \to T(x)] \Leftrightarrow \neg\exists x[F(x)\ \&\ S(x)\ \&\neg T(x)]$
- Дистрибутивность кванторов относительно логических операторов

  $\forall x[P(x)\ \&\ Q(x)] \Leftrightarrow \forall x P(x)\ \&\ \forall x Q(x)$

  Но не верно, что

  $\forall x[P(x) \to Q(x)] \Leftrightarrow [\forall x P(x) \to \forall x Q(x)]$??

83