3. Kahendsüsteem, selle erikujud ja sarnased süsteemid

Käesolevas peatükis kirjeldame kahandsüsteemi erikujusid, samuti arvusüsteeme, mis on oma olemuselt ja rakenduselt kahendsüsteemiga lähedased. Iga konkreetse arvusüsteemi puhul on kirjeldatud lühidalt järgmisi alateemasid: süsteemi olemus ja tähtsus, teisendused kirjeldatava süsteemi ja kümnendsüsteemi vahel, aritmeetika põhireeglid kirjeldatavas arvusüsteemis ja süsteemi "head" ja "halvad" küljed. Iga süsteem on defineeritud läbi süsteemi aluse, kasutatavate märkide hulga ning rakendatava polünoomvalemi.

- **Kahendsüsteem {0,1}**

Kirjeldame esimesena lühidalt lihtsaimat kahendsüsteemi, mida on põhjalikult käsitletud hilisemas ja mis on tegelikult kogu digitaalaritmeetika aluseks.
Arvusüsteem alusega p=2 ja kasutatavate sümbolitega $a_i \in \{0,1\}$.

Arvu väärtus leitakse polünoomvalemiga $N = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i 2^i$

Täis- ja murdosa sisaldava arvu järkude tähistus:
$a_{n-1}\, a_{n-2}\, \ldots\, a_1\, a_0\, ,\, a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots\, a_{-m+1}\, a_{-m}$

Arvude esitusdiapasoon n-järguliste täisarvude korral $\{0 \ldots 2^n\text{-}1\}$.

Täis- ja murdarvude teisendamine nimetatud kahendsüsteemi ja kümnendsüsteemi vahel toimub eelkirjeldatud reeglitega. Teisendused kümnendsüsteemist kahendsüsteemi teostatakse läbi jagamise (täisarvud) või korrutamise (murdarvud) "uue" arvusüsteemi alusega 2. Vastupidised teisendused on kõige lihtsam teha polünoomvalemi abil.

Aritmeetikatehted.
Liitmine.
Liitmise põhireeglid:
0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 10_2 (s.o. summa = 0 ja tekib ülekanne = 1 järgmisesse vanemasse järku)
1 + 1 + 1 = 11_2 (s.o. summa = 1 ja tekib ülekanne = 1 järgmisesse vanemasse järku)

Järgnevas tõeväärtustabelis on kirjeldatud summa väärtuse s_i ja leviva ülekande väärtuse c_{i+1} sõltuvus operandide järkude väärtustest x_i ja y_i, samuti antud järku "sissetuleva" ülekande väärtusest c_i.

x_i	y_i	c_i	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Näide.

Antud kümnendarvud X ja Y. Teisendada nad kahendsüsteemi, teostada tehe S:=X+Y, teisendada tulemus tagasi kümnendsüsteemi.

$X = 987_{10} = 1111011011_2$

$Y = 123_{10} = 1111011_2$

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Järgu kaal
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1		Ülekanne C
	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	Arv X
+				1	1	1	1	0	1	1	Arv Y
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	Summa S
s_{10}	s_9	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0	Järgud

$S = 10001010110_2 = 1 \bullet 2^{10} + 1 \bullet 2^6 + 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 = 1110_{10}$

Lahutamine

Lahutamise põhireeglid:

0 - 0 = 0

1 - 0 = 1

1 - 1 = 0

10 - 1 = 1_2 (s.o. laen järgmisest järgust = 1)

Järgnevas tõeväärtustabelis on kirjeldatud vahe väärtuse d_i ja antud järgust "edasileviva" laenujärgu väärtuse b_{i+1} sõltuvus operandide järkude väärtustest x_i ja y_i, samuti "sissetuleva" laenujärgu väärtusest b_i.

x_i	y_i	b_i	b_{i+1}	d_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Näide:

Antud kümnendarvud X ja Y. Teisendada nad kahendsüsteemi, teostada tehe D:=X-Y, teisendada tulemus tagasi kümnendsüsteemi.

$X = 987_{10} = 1111011011_2$

$Y = 123_{10} = 1111011_2$

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Järgu kaal
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	Laen B
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	Arv X
-			1	1	1	1	0	1	1	Arv Y
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	Vahe D

d_9	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0	Järk

$D = 1101100000_2 = 512 + 256 + 64 + 32 = 864_{10}$

Korrutamine
Korrutustabel

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Näide:
Antud kümnendarvud X ja Y. Teisendada nad kahendsüsteemi, teostada tehe C:=X•Y, teisendada tulemus tagasi kümnendsüsteemi.
$X = 25_{10}$
$Y = 13_{10}$

$C:=25_{10} \bullet 13_{10} = 11001_2 \bullet 1101_2$
Osakorrutise kirjutame üksteise alla vastava nihkega vasakule sõltuvalt vaadeldava järgu kaalust.

				1	1	0	0	1
			•		1	1	0	1
				1	1	0	0	1
			0	0	0	0	0	
		1	1	0	0	1		
	1	1	0	0	1			
1	0	1	0	0	0	1	0	1

$S=101000101_2= 256 + 64 + 4 + 1 =325_{10}$

Murd- ja täisarvude korrutamine.

Täisarvude korrutamisel on korrutise järkude arv üldjuhul hinnatav tegurite järkude arvude summana. Praktiliste rakenduste korral tekitab see meile hiljem ületäitumise probleeme, kuna ei saa normaalseks lugeda olukorda, kus iga korrutustehte puhul tuleb korrutisele reserveerida topeltpikkusega register võrreldes teguritega. Olukorra lahendamiseks tuleb sisse viia ületäitumise kontrolli vahendid.
Murdarvude korrutamisel tuleb jälgida, et korrutises oleks järkude arv peale koma võrdne komajärgsete kohtade arvuga tegurites. Korrutamise tulemus ei saa olla täpsem kui teguritel. Seetõttu tuleb väljaarvutatud korrutise noorematest järkudest osa ära jätta, viimast ärajäätavat järku võib kasutada ümardamiseks.
Järgnevas näites on kahe arvu (kummaski 5 kohta pärast koma) korrutis ümardatud sama pikaks murdarvuks, kuigi korrutamine annab 10 kohta pärast koma. Ümardamine on toimunud allapoole.

						0,	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
					•	**0,**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
							1	**1**	**0**	**0**	**1**
						0	**0**	**0**	**0**	**0**	
					1	**1**	**0**	**0**	**1**		
				1	**1**	**0**	**0**	**1**			
			0	**0**	**0**	**0**	**0**				
0,	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

0,11001 • 0,01101 = 0,01010(00101) ≈ 0,01010

- Jagamine

Jagamine realiseerub analoogselt kümnendsüsteemis "käsitsijagamisel" toimuvaga. Jagatis leitakse järkhaaval alates vanemast järgust, arvutades igas tsüklis välja järjekordse vahe nn. vahejäägi ja jagaja vahe. Erinevalt kümnendsüsteemist lahutatakse ainult jagaja ühekordset väärtust. Vastavalt tekkinud uue vahejäägi märgile tehakse üks kahest järgnevast otsusest:

- kui vahejääk on positiivne või null, loetakse järjekordne jagatise järk võrdseks "1"-ga ja jätkatakse järgmise lahutamistsükliga, nihutades eelnevalt jagaja paigutust ühe järgu võrra paremale;
- kui vahejääk on negatiivne, loetakse jagatise järk võrdseks "0"-ga, lahutamine annuleeritakse (hilisemas nimetame seda "jäägi taastamiseks") ja uus lahutamine sooritakse taastatud vahejäägi ja ühe järgu võrra paremale nihutatud jagajaga.

Täisarvuliste operandide jagamise tulemuseks on täisarvuline jagatis ja täisarvuline positiivne jääk.

<u>Näide.</u>
$88_{10}:6_{10}=14_{10}$, jääk 4_{10} ehk kahendkujul
$1011000_2:110_2=1110_2$, jääk 100_2

Nr.	1	0	1	1	0	0	0	:	1	1	0	=	1	1	1	0
1	-	1	1	0												
2	+	1	0	1	0											
3		-	1	1	0											
4		+	1	0	0	0										
5			-	1	1	0										
6			+	0	1	0	0									
7				-	1	1	0									
8				-	0	1	0									

Esimeses tsüklis paigutatakse jagaja (rida 1, vt. numbris vasakus veerus) nii, et vahe annaks positiivse tulemuse (rida 2). Jagatise vanem järk võrdub ühega. Vahejäägist (rida 2) lahutatakse nihutatud jagaja (rida 3). Tulemus on jälle positiivne (rida 4), jagatise järgmine järk võrdub "1"-ga. Analoogselt leitakse jagatise kolmas järk (read 5 ja 6). Jagatise viimase järgu arvutamiseks tuleb vahejäägist 100 lahutada jagaja 110, mis annab negatiivse tulemuse. Seega jagatise viimane järk võrdub "0"-ga ja jäägiks jääb reas 6 olev vahejääk.

Murdarvude jagamist on põhjalikult käsitletud alateemas "Jagamisalgoritmid". Siinkohal vaid märkusena, et murdude jagamine eeldab, et jagatav on väiksem kui jagaja (vastasel korral sisaldab jagatis täisosa) ja toimub üldjoontes analoogselt eelmise näitega.

Kirjeldatud kahendsüsteem on äärmiselt laia kasutusega digitaalaritmeetika realisatsioonides. Tema põhilise puudusena võib välja tuua vajaduse kasutada negatiivsete arvude esitamisel teatavaid erikoode (täiendkood, pöördkood), mis lihtsustavad aritmeetikaoperatsioonide realiseerimist.

- **Kahendsüsteem {-1,1}**

Järgnevas vaatame mõningaid kahendsüsteemi erikujusid, mis võimaldavad esitada ühtses kirjapildis nii positiivseid kui ka negatiivseid arve ilma märki ilmutatud kujul näitamata.
Neist esimesena kahendsüsteem alusega p=2 ja kasutatavate sümbolitega $a_i \in \{-1,1\}$.

Kehtiv polünoomvalem (täisarvud): N = $\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$

Selle arvusüsteemi iseloomustuseks võib välja tuua järgnevad omadused.

- Positiivsete ja negatiivsete arvude ühtne esitus. Seoses väärtuse "-1" kasutamisega võib selles süsteemis esitatud arvul olla nii positiivne kui ka negatiivne väärtus. Ühtlasi määrab vanema väärtusjärgu märk ära ka kogu arvu märgi.
- Kaks korda sisuliselt suurem diapasoon võrreldes tavalise kahendsüsteemiga. Suurim positiivne kujutatav täisarv n järgu korral on endiselt $+(2^n-1)$. Suurima absoluutväärtusega negatiivne täisarv on $-(2^n-1)$.
- Paarisarvude probleem. Seoses väärtuse "0" puudumisega ei saa kujutada täisarvulises formaadis paarisarve ja täisarvud on tegelikult selles süsteemis esitatavad diskreetsusega 2, s.o. üle ühe. See häirib väga oluliselt aritmeetikatehete realiseerimist ning muudab selles osas süsteemi mittekasutatavaks. Paarisarve saab põhimõtteliselt kujutada, tuues sisse murdosa, millele võib anda väärtuse $\pm (1-2^{-m}) \approx \pm 1$, kus m on järkude arv pärast koma. Näiteks $1111,(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)_2 \approx 14_{10}$ (täisosa = 15, murdosa ligikaudu -1).

Kümnendarvude teisendamine süsteemi {-1,1}.

Kuna süsteem ei toeta paarisarvude kujutamist, siis on "puhta" täisarvuna võimalik esitada vaid paarituid arve. Teisendusel tuleb valida jäägi väärtuseks kas +1 või -1 nii, et jagamisel tekkiv jagatis oleks uuesti paaritu.

<u>Näide:</u>
Teisendame kümnendarvu +25 süsteemi {-1,1}.

25	-1	Jääki +1 ei saa valida, kuna jagatis oleks siis 12
13	-1	Jääki +1 ei saa valida, kuna jagatis oleks siis 6
7	1	
3	1	
1	1	

$+25_{10} = 111(-1)(-1)_2$ (Kontroll: 16+8+4-2-1 = 25)

Negatiivse arvu leidmine on väga lihtne - tuleb väärtus "1" asendada "-1"-ga ja vastupidi.
$-25_{10} = (-1)(-1)(-1)11_2$ (Kontroll: -16-8-4+2+1 = -25)

Aritmeetikatehete realiseerimine selles süsteemis on äärmiselt raskendatud. Lisaks juba kirjeldatud paarisarvude probleemile tekivad raskused juba elementaarsel liitmisel - kahe paaritu arvu liitmisel peab tekkima paarisarv, mis pole süsteemis kujutatav.

- **Kahendsüsteem {1,0,-1}**

Järgmisena vaatleme kahendsüsteemi alusega p=2 ja kasutatavate kolme sümboliga $a_i \in \{-1,1\}$.

Süsteemis kehtiv polünoomvalem (täisarvud): $N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$

Märgime, et see süsteem pole käsitletav loomulike kaaludega süsteemina, kuna hoolimata aluse väärtusest 2 on igal järgul võimalik omandada kolm erinevat väärtust. n-kohaliste arvude korral on seega koodikombinatsioonide koguarv võrdne 3^n, samas kui arvude esitusdiapasoon on $-(2^n -1) \le x \le (2^n -1)$. Seetõttu on antud arvusüsteem "liiane" ja arvude kodeerimine sellesse süsteemi ei ole ühene. Lihtsaima näitena võib tuua kümnendarvu 1_{10} kodeeringu:
$1_{10} = 01_2 = 1(-1)_2$
Samuti näiteks:
$9_{10} = 1001_2 = 1(-1)01(-1)_2$ (16-8+2-1 = 9)

Teisendusel sellesse süsteemi on paaritu vahetulemuse korral on lubatud valida jäägi väärtus kas 1 või (-1).

Näide:
Teisendame kümnendarvu +25 süsteemi {-1,0,1}.

25	1	Võime valida ka jäägi -1, jagatis on sel juhul 13
12	0	
6	0	
3	-1	Võime valida ka jäägi 1, jagatis on sel juhul 1
2	0	
1	-1	Võime valida ka jäägi 1, jagatis on sel juhul 0
1	1	Võime valida ka jäägi -1, jagatis on sel juhul 1

$+25_{10} = 1(-1)0(-1)001_2$ (64-32-8+1 = 25)
Erinevaid kujusid arvu +25 kujutamiseks on palju (põhimõtteliselt lõpmatu hulk juhul kui järkude arv pole piiratud).

Negatiivne arv on leitav kui positiivse arvu esituse pöördväärtus (asendades $1 \rightarrow -1$ ja $-1 \rightarrow 1$)

$-25_{10} = (-1)10100(-1)_2$ (-64+32+8-1 = -25)

Aritmeetikatehted on selles süsteemis väga lihtsad.

Näiteks liitmistabel on järgnev:

+	-1	0	1
-1	(-1)0	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	10

<u>Näide:</u>
Sooritame järgneva liitmistehte:
$+35_{10} + (-13_{10})$

Järkude kaalud	64	32	16	8	4	2	1
+35	1	-1	0	0	1	-1	1
-13			-1	1	-1	0	-1
Summa = +22	1	-1	-1	1	0	-1	0

Kontroll: 64-32-16+8-2=+22

Korrutustabel on selles süsteemis järgnev::

•	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

<u>Näide:</u>
Sooritame järgneva korrutamistehte:
$+12_{10} \bullet (-11_{10})$

+12					1	1	0	0
-11				*	-1	0	-1	-1
					-1	-1	0	0
				-1	-1	0	0	
		-1	-1	0	0			
Tulemus: -132	-1	0	0	0	0	-1	0	0
Järkude kaalud:	128	64	32	16	8	4	2	1

Kirjeldatud süsteem ühendab tegelikult kahendsüsteemide {0,1} ja {1,-1} head omadused ja kompenseerib nende puudusi. Kumbagi nendest süsteemidest võib tinglikult nimetada süsteemi {0,1, -1} "alamhulgaks".

Süsteemi edukas rakendamine on piiratud tehnoloogia ja praktilise realisatsiooniga - digitaaltehnikas laialtlevinud kahevalentsete loogika- ning mäluelementide kasutamisel kaovad süsteemi kõik "head küljed", kuna kolmendväärtusega järk tuleb realiseerida 2-bitise struktuurina. Piisava töökindlusega kasutatav kolmevalentne elementbaas puudub.

- **Negatiivse alusega kahendsüsteem {0,1}**

Võtame vaatluse alla kahendsüsteemi negatiivse alusega p= -2 ja kasutatavate kahe sümboliga $a_i \in \{0,1\}$.

Süsteemis kehtiv polünoomvalem (täisarvud): $N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (-2)^i$

Seoses sellega, et süsteemi alus on negatiivne, omandavad järkude kaalud järgu indeksi kasvades kordamööda positiivsed ja negatiivseid väärtusi. Seejuures on vanem väärtusbitt (bitt väärtusega "1") interpreteeritav ka arvu märgibitina.
Täisarvu mõningate nooremate järkude kaalud on toodud järgnevas tabelis:

Järk	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
Järgu kaal	-32	16	-8	4	-2	1

Täisarvude esitusdiapasoon on null-punkti suhtes ebasümmeetriline. Sõltuvalt vanema järgu indeksist (paaris või paaritu) on ülekaalus kas positiivsed või negatiivsed arvud. Järgnevas tabelis on toodud diapasooni alampiir A_{min} ja ülempiir A_{max} sõltuvalt arvuformaadi pikkusest n.

n	A_{min}	A_{max}
2	-2	+1
3	-2	+5
4	-10	+5
5	-10	+21
6	-42	+21
7	-42	+85
8	-170	+85

Teisenduse puhul kümnendsüsteemist nimetatud arvusüsteemi tuleb arvestada seda, et järkude kaalud on erinevate märkidega, mistõttu osa jääke (paaritu indeksiga järkudes) on tegelikult oma arvväärtuselt negatiivsed. Seda tuleb arvestada järjekordse jagatise leidmisel. Arvu teisendamine toimub läbi jagamise 2-ga (Horneri teisendus), kuid jagatis leitakse seosest "jagatav miinus jääk" jagatud 2-ga, kus jääk on märgiga suurus sõltuvalt järgu kaalu märgist.

<u>Näide:</u>
Teisendada arv 7_{10} "miinus-kahendsüsteemi".

7_{10}	1_+	(7-1)/2	Jääk positiivne (+1)
3	1_-	(3-(-1))/2	Jääk negatiivne (-1)
2	0_+	(2-0)/2	Jääk 0
1	1_-	(1-(-1))/2	Jääk negatiivne (-1)
1	1_+	(1-1)/2	Jääk positiivne (+1)

Seega: $7_{10} = 11011_{-2}$

Aritmeetikareeglid on suhteliselt lihtsad.
Liitmisreeglid:
0+0=0
0+1=1
1+0=1
1+1=110_{-2} (nii näeb välja kümnendväärtus 2_{10} selles süsteemis)
1+1+1=111_{-2} (kümnendväärtus 3_{10})
1+1+1+1=100_{-2} (kümnendväärtus 4_{10})
1+1+1+1+1=101_{-2} (kümnendväärtus 5_{10})

<u>Näide:</u>
Realiseerida tehe: $7_{10} + 19_{10}$
Leiame:
$19_{10} = 10111_{-2}$

Ülekanded	1	1	1				
Ülekanded			1	1			
Ülekanded				1	1		
Ülekanded					1	1	
+7			1	1	0	1	1
+19			1	0	1	1	1
+26	1	1	0	1	1	1	0
Järgu kaal	64	-32	16	-8	4	-2	1

Tulemus: 1101110_{-2} = 64-32-8+4-2=26_{10}

Tähelepanu tasub pöörata asjaolule, et ülekanded kipuvad massiliselt levima ja summeerimine võib mitte koonduda, kui mitte arvestada asjaolu, et kehtib seos $1_{-2} + 11_{-2} = 0$. Nimelt on siin tegemist pluss "1" ja miinus "1" liitmisega ($11_{-2} = -1_{10}$). Järgnevas on sellele seosele viidatud kui "koonduvuse kolmnurgale".

Negatiivsete arvude leidmine baseerub asjaolul, et selles süsteemis esitatud arvu nihutamine vasakule ühe koha võrra vastab arvu väärtuse korrutamisele (-2)-ga ehk süsteemi alusega. Liites kokku arvu absoluutväärtuse ja biti võrra vasakule nihutatud väärtuse, saame:

$$A + (-2\bullet A) = A - 2\bullet A = - A$$

<u>Näide:</u>
Realiseerida tehe:
$14_{10} - 23_{10} = 14_{10} + (-23_{10})$
Leiame väärtused 14_{10} ja 23_{10}.
$14_{10} = 10010_{-2}$
$23_{10} = 1101011_{-2}$
Väärtuse -23_{10} leiame, summeerides:

+23		***1***	1	0	1	0	***1***	1
(-2)*+23	***1***	***1***	0	1	0	***1***	***1***	
Tulemus -23	0	0	1	1	1	0	0	1
Järkude kaalud	-128	64	-32	16	-8	4	-2	1

Bold Italic-uga on välja toodud +1 ja -1 nn "koondumise kolmnurgad".
Seega: $-23_{10} = 111001_{-2}$ (- 32 + 16 - 8 + 1 = - 23)

Liitmistehe ise:

-23	***1***	***1***	1	0	0	1
+14		***1***	0	0	1	0
-9			1	0	1	1

Tulemus: $1011_{-2} = - 8 - 2 + 1 = -9_{10}$

- **Kahendsüsteemide seotud arvusüsteemid**

Kaheksandsüsteem

Arvusüsteem alusega p=8 ja võimalike järguväärtustega $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Kehtiv polünoomvalem N = $\sum_{i=-m}^{n-1} a_i 8^i$

Teisendus kümnendsüsteemist kaheksandsüsteemi baseerib Horneri teisenduste rakendamisel (jagamine 8-ga täisarvude korral ja korrutamine 8-ga murdarvude korral).

Näide:

Teisendada $34{,}6_{10}$ kaheksandsüsteemi kahe kohaga peale koma.

34	2
4	4

$34_{10} = 42_8$

0,6	0
4,8	4
6,4	6
3,2	3

$0{,}6_{10} \approx 0{,}463_8 \approx$ (pärast ümardamist kahe kohani) $0{,}46_8$

$34{,}6_{10} = 42{,}46_8$

Aritmeetikatehted

Järgu i väärtuste liitmisel tekib ülekanne vanemasse järku i+1, kui summa on suurem 7-st:

$s_i = x_i + y_i > 7 \Rightarrow$ tekib ülekanne järku i+1 ja summa $s_i = x_i + y_i - 8$

Lahutamisel tähendab laen väärtuse "8" juurdetoomist järgust i+1 järku i:

$d_i = x_i - y_i < 0 \Rightarrow$ laen järgust i+1; $d_i = x_i - y_i + 8$

Näide:

Realiseerime tehted:

$34{,}6_{10} + 23{,}7_{10}$ ja $34{,}6_{10} - 23{,}7_{10}$

$34{,}6_{10} = 42{,}46_8$ ja $23{,}7_{10} = 27{,}55_8$

Liitmine:

ülekanne	1	1	1	
+34,6	4	2,	4	6
+23,7	2	7,	5	5
	7	2,	2	3

$72{,}23_8 = 7\bullet 8 + 2\bullet 1 + 2\bullet(1/8) + 3\bullet (1/64) \approx 58{,}3_{10}$

Lahutamine:

laen	*	*		
+34,6	4	2,	4	6
-23,7	2	7,	5	5
	1	2,	7	1

$12{,}71_8 = 1\bullet 8 + 2 \bullet 1 + 7\bullet(1/8) + 1\bullet(1/64) \approx 10{,}9_{10}$

Korrutamine toimub analoogselt korrutamisele 10-süsteemis.

Koostame kaheksandsüsteemi korrutustabeli:

•	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Näide:
Realiseerime tehte:
$34{,}6_{10} \bullet 29{,}7_{10} \approx 42{,}5_8 \bullet 35{,}6_8$

				4	2,	5
				3	5,	6
6•5					3	6
6•2				1	4	
6•4			3	0		
6•42,5			3	1	7	6
5•42,5		2	5	5	1	
3•42,5	1	4	7	7		
	2	0	0	6,	0	6

$42{,}5_8 \bullet 35{,}6_8 \approx 2006{,}1_8$

Jagamine: põhimõte lihtne (analoogia kümnendsüsteemiga), realisatsioon tülikas, kuna pidevalt tuleb järgida kaheksandsüsteemi lahutamis- ja korrutamisreegleid.

Olulisem põhjus, miks me üldse käsitleme kaheksandsüsteemi eraldi teemana, on asjaolu, et kaheksandsüsteemi ja kahendsüsteemi vahel on tihe seos tänu sellele, et

$8 = 2^3$. Seetõttu on teisendus kaheksand- ja kahendsüsteemide vahel väga lihtne ning kaheksandsüsteemi kasutatakse tihti "vahesüsteemina" teisendustel kümnend- ja kahendsüsteemide vahel.
Igale kaheksandsüsteemi numbrile saab vastavusse seada 3-bitise kahendarvude kolmiku ehk "triaadi". Järgnevas on toodud vastavustabel kaheksandsüsteemi ja kahendsüsteemi väärtuste vahel.

8-süst.	2-süst.
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Nende seoste teadmine võimaldab kaheksandarvu kergesti teisendada kahendsüsteemi, asendades kaheksandnumbri talle vastava kolme bitiga.

<u>Näide:</u>
$317,65_8 = 011\ 001\ 111,\ 110\ 101_2$

Teisendustel kümnendsüsteemist kahendsüsteemi on võimalik arv esialgu teisendada Horneri teisendustega kaheksandsüsteemi ja siis teha juba asendus kahendsüsteemi ($10 \Rightarrow 8 \Rightarrow 2$). Sama jada vastupidises järjekorrast ($2 \Rightarrow 8 \Rightarrow 10$) on võimalik rakendada teisendusel kahendsüsteemist kümnendsüsteemi.

<u>Näide:</u>
$10\ 011\ 001,\ 100\ 1_2 = 231,44_8 = 2\bullet 64 + 3\bullet 8 + 1 + 4/8 + 4/64 \approx 153,56_{10}$

Analoogilistel eesmärkidel on võimalik kasutada ka 4-süsteemi ja 16-süsteemi.

Neljandsüsteem alusega $p=4$ ja järguväärtustega $a_i \in \{0,1,2,3\}$ võimaldab neljandarvu iga järgu asendada 2-bitise kahendarvuga $\{00,01,10,11\}$ ja vastupidi.

<u>Näide:</u>
$3321,303_4 = 11\ 11\ 10\ 01,\ 11\ 00\ 11_2$
$10110,101_2 = 112,22_4$

Kuueteistkümnendsüsteem alusega $p=16$ ja järguväärtustega $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ võimaldab teisendust, kus iga 16-süsteemi järk asendatakse neljabitise tetraadiga vastavalt väärtustele {0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111}.

<u>Näide:</u>
$E2,A_{16} = 1110\ 0010,\ 1010_2$

- **Kolmendsüsteem**

Tavaline kolmendsüsteem alusega p = 3 ja järguväärtustega $a_i \in \{0,1,2\}$ ei paku meile käesolevas kontektis erilist huvi. Vaatleme aga järgnevas kolmendsüsteemi, kus märkidena kasutatakse väärtusi $a_i \in \{-1,0,1\}$.
Sellisel süsteemil on meie temaatika konteksti mitmeid häid omadusi:

- suurem arvude esitusdiapasoon võrreldes vastava kahendsüsteemiga {-1,0,1};
- arvude esituse ühesus erinevalt kahendsüsteemist {-1,0,1};
- negatiivsete arvude esitamise võimalus ja lihtsus;
- aritmeetikareeglite suhteline mugavus.

Süsteemis kehtib polünoomvalem N = $\sum_{i=-m}^{n-1} a_i 3^i$

Kui arvuformaadi pikkus on n järku, siis võimalikud 3^n kombinatsiooni jagunevad positiivsete ja negatiivsete arvude vahel pooleks.
Arvude esitamise diapasioon on seega $-(3^n/2) \le x \le +(3^n/2)$.

Teisendused kümnendsüsteemist vaadeldavasse kolmendsüsteemi võivad olla realiseeritud järgnevalt.
Esiteks on võimalik teisendus läbi viia kahes järgus - kõigepealt teisendada arv "tavalisse" kolmendsüsteemi ja edasi asendada kõik väärtused "2" väärtustepaariga "1(-1)" (ehk vastavasse järku "2" asemele "-1" ja ülekanne "1" järgmisesse vanemasse järku.). Selline teisendus on sarnane nii täis- kui ka murdarvude jaoks.
Teine võimalus on teisendada kümnendarv otse vaadeldavasse süsteemi. Selleks on täisarvude korral vaja 3-ga jagamisel mitte lubada jääki "2", vaid asendada see jäägiga "-1" muutes muidugi ka jagatise väärtust.

<u>Näide:</u>
Teisendada 29_{10} kolmendsüsteemi.

29	-1	Jääk valitakse (-1) ja 29-(-1)/3=10
10	1	
3	0	
1	1	

$29_{10} = 101(-1)_3$ (Kontroll: 1•27 + 1•3 + (-1) •1 = 29)

Negatiivse arvu leidmiseks vahetatakse väärtused 1 ja (-1).
$-29_{10} = (-1)0(-1)1_3$ (Kontroll: (-1) •27 + (-1) •3 + 1•1 = - 29)

Murdarvude korral tuleb tähelepanu pöörata sellele, et nimetatud arvusüsteemis on "puhta murruna" kujutatavad kümnendmurrud diapasoonis $-0,5 \le x \le +0,5$, kuna kolmendmurru 0,1111...1 väärsuseks on 1/3+1/9+1/27+1/81.... , mis annab kohtade arvu kasvades piirväärtuseks 0,5. Absoluutväärtuselt suuremad murrud sisaldavad täisosa. Näiteks murd 0,7 esitatakse täisosa 1 ja murdosa (-0,3) abil.
Kui murd on "lubatud" diapasoonis, toimub teisendamine järgnevalt. Murd (kas positiivne või negatiivne) korrutatakse 3-ga.

- Kui tulemus on -0,5 ja +0,5 vahel, on järjekordne järgu väärtus kolmendsüsteemis võrdne 0-ga ja korrutamine jätkub.

- Kui tulemus on suurem kui (+0,5), on leitud järgu väärtus võrdne (+1)-ga. Enne korrutamise jätkamist lahutatakse saadud vahetulemusest väärtus 1.
- Kui tulemus on väiksem kui (-0,5), on leitud järgu väärtus võrdne (-1)-ga. Enne korrutamise jätkamist lahutatakse saadud vahetulemusest väärtus (-1) ehk liidetakse 1.

Näide:
Teisendada $0,3_{10}$ väärtus kolmendsüsteemi 5 kohaga pärast koma.

0,3			
0,9	1	a_{-1}	0,9-1 = -0,1
-0,3	0	a_{-2}	
-0,9	-1	a_{-3}	-0,9-(-1) = 0,1
0,3	0	a_{-4}	
0,9	1	a_{-5}	0,9-1 = -0,1

$0,3_{10} = 0,10(-1)01_3$

Näide:
Teisendada $0,7_{10}$ väärtus kolmendsüsteemi 5 kohaga pärast koma.
Avaldame 0,7 = 1 - 0,3 (täisosa 1, murdosa (-0,3))
$-0,3_{10} = 0,(-1)010(-1)_3$ (vastandväärtus varem leitud 0,3-le)
$0,7_{10} = 1,(-1)010(-1)_3$

Aritmeetikareeglid:
Liitmistabel:

+	-1	0	1
-1	(-1)1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	1(-1)

Kahe "1" summa annab järgu väärtuse (-1) ja ülekande 1, kuna $2_{10}=1(-1)_3$.
Kahe "-1" summa annab järgu väärtuse 1 ja ülekande (-1), kuna $-2_{10}=(-1)1_3$.
$1+1+1 = 10_3$
$1+1+1+1 = 11_3$

Näide:
Leida $29,3_{10} + (-5,6_{10})$

$29,3_{10} = 101(-1),10(-1)01_3$ (oli leitud varem)
$5,6_{10} = 1(-1)0,(-1)(-1)11(-1)_3$ (NB! kontrollige leidmise korrektsust)
$-5,6_{10} = (-1)10,11(-1)(-1)1_3$ (eelmise rea pöördväärtus)

Ülekanne	0	1	0	1	0	-1	0	1	
$29,3_{10}$	1	0	1	-1,	1	0	-1	0	1
$-5,6_{10}$	+	-1	1	0,	1	1	-1	-1	1
Tulemus	1	0	-1	0,	-1	0	1	0	-1

$10(-1)0,(-1)010(-1)_3 = 27 + (-3) + (-1/3) + (1/27) + (-1/243) \approx 23,7_{10}$

Lahutamine realiseeritakse läbi negatiivse arvu liitmise.

Korrutustabel on väga lihtne:

•	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

<u>Näide:</u>

Leida korrutis $29_{10} \bullet (-5_{10})$

$29_{10} = 101(-1)_3$

$-5_{10} = (-1)11_3$

			1	0	1	-1
		•		-1	1	1
Ülekanded			1			
1.osakorrutis			1	0	1	-1
2.osakorrutis		1	0	1	-1	
3.osakorrutis	-1	0	-1	1		
Korrutis	-1	1	1	-1	0	-1

$(-1)11(-1)0(-1)_3 = (-243)+81+27+(-9)+(-1) = 145_{10}$

Jagamine antud arvusüsteemis on veidi keerukam, kuid samuti põhimõtteliselt realiseeritav.

Nagu ka analoogilise kahendsüsteemi {-1,0,1} korral on selle süsteemi edukas rakendamine piiratud tehnoloogia ja praktilise realisatsiooniga - digitaaltehnikas laialtlevinud kahevalentsete loogika- ning mäluelementide kasutamisel kaovad süsteemi kõik "head küljed", kuna kolmendväärtusega järk tuleb realiseerida 2-bitise struktuurina. Piisava töökindlusega kasutatav kolmevalentne elementbaas puudub.