

- **Kahend-kümneendkoodid**

Järgnevas tutvustame lühidalt koode, mis säilitavad oma esituses kümneandruvude struktuuri ja mille puhul kodeeritakse kahendkoodi mitte kümneandruv tervikuna, vaid tema järgud - üheliste arv, kümneliste arv, sajaliste arv jne. Nimetatud koodid on oma olemuselt nii kahend- kui ka kümneendruvüsteemi omadustega, mistõttu neid nimetatakse kahend-kümneendruvudeks (**Binary-Coded-Decimal - BCD-koodidideks**).

Tegemist on koodidega, mille puhul kodeeritakse kümneendruvüsteemis kasutatavad numbrid $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kahendruvüsteemi. Kümne numbriga kodeerimiseks on vaja vähemalt 4-bitiseid kahendkoode ehk tetraade. Selliseid tetraade $\{0000, 0001, \dots, 1110, 1111\}$ on kokku 2^4 ehk meil on tegemist ülesandega: kuidas kodeerida 10 objekti (kümneendruvnumbrit) 16 koodikombinatsiooniga.

Lihtne arutelu näitab, et erinevaid koode on väga palju. Alustedes kodeerimist numbrist "0", on meil võimalik talle valida üks 16-st koodist (ehk meil on 16 varianti). Edasi on meil numbriga "1" kodeeringuks 15 "vaba" koodikombinatsiooni; numbriga "2" kodeerimiseks 14 võimalust jne. Viimase numbriga "9" koodi valimise momendiks on meil veel "7" vaba koodi. Seega on erinevate kodeeringute ehk erinevate BCD-koodide arv $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = (16!)/(6!) \approx 2,9 \cdot 10^{10}$.

Nr.	8421	XS3	XS6	2421	84-2-1
0	0000	0011	0110	0000	0000
1	0001	0100	0111	0001	0111
2	0010	0101	1000	0010	0110
3	0011	0110	1001	0011	0101
4	0100	0111	1010	0100	0100
5	0101	1000	1011	1011	1011
6	0110	1001	1100	1100	1010
7	0111	1010	1101	1101	1001
8	1000	1011	1110	1110	1000
9	1001	1100	1111	1111	1111

Eeltoodud tabelis on toodud mõned võimalikud BCD-koodid.

Esimeses veerus on esitatud enimkasutatav nn. **loomulike kaaludega BCD-kood**, mida tihti tähistatakse ka tavalistele kahendkaaludele vastava numbrikombinatsiooniga 8-4-2-1. Nagu näha, vastab igale kümneandruvule tema harilik neljakohaline kahendväärtus. Seega on koodis kasutatel 10 väiksema arväärtusega tetraadi ja 6 "suuremat" tetraadi moodustavad keelatud koodikombinatsioonide hulga. Nimetatud BCD-koodi kasutatakse üpris laialt, kuna ta vastab tavalisele arusaamale kümneandruvude kahendväärtustest. Samas pole kood kõige lihtsam aritmeetikatehete seisukohalt.

Teises veerus on esitatud nn. **"liiase 3-ga" BCD-kood** ("Excess-3" ehk XS3). Selles koodis vastav kümneendruvnumbrile x tetraad, mis on oma arväärtuselt võrdne x+3-ga. Selles koodis on keelatud kombinatsioonideks kolm nooremat tetraadi (0000, 0001 ja 0010) ning kolm vanemat tetraadi (1101, 1110 ja 1111). Selline keelatud tetraadide jaotus lihtsustab hilisemas aritmeetikatehete realiseerimise, täpsemalt ülekannete

tekitamist tetraadide vahel ja tetraadide korrektsiooniks vajalike parandusliikmete genereerimist. Märgime, et selles koodis kehtib koodikombinatsioonide nn. "täiendus 9-ni" s.t. koodikombinatsioonid, milledele vastavate kümnendväärtuste summa on 9, on kodeeritud parajasti teineteise pöördkoodidega. See tähendab, et nende summa annab alati tetraadi 1111 (s.o. maksimaalne tetraadi väärtus). Sitt tuleneb, et kui liidetavate tetraadide summa on suurem kui 9, tekib automaatselt tetraadidevaheline ülekanne, kuna summa tuleb tetraadväljenduses suurem kui 1111.

Kolmandas veerus on esitatud "liiase 6-ga" (XS6) kood, kus keelatudteks osutuvad kuus väiksemat tetraadi. Kood on omadustelt sarnane koodile 8421. Neljandas veerus toodud koodis 2421 on jällegi täidetud "täiendus 9-ni". Viimases veerus on toodud näide koodist, kus osade järkude kaalud on negatiivsed.

Edasises on põhjalikumalt vaadeldud loomulike kaaludega koodi ja liisase 3-ga koodi.

• **Teisendus kahendsüsteemist BCD-koodi "8421"**

Olgu meil antud arvu kahendväärtus. Hakkame seda nihutama vasakule ja nihutame väljanihkunud järgud saadavasse BCD-koodi. Bitid nihkuvad sisse paremalt ja alates saadava arvu nooremast tetraadist. Juhul kui sissenihutatud väärtus mingis tetraadis on suurem kui "9" või tekib ülekanne väärtusega "1" tetraadist välja, tuleb sellesse tetraadi juurde liita parandusliige "+6", mis võimaldab vahele jätta kuus keelatud tetraadi ja korrigeerida tulemus õigeks.

Järgnevas näites on sellisel teel teisendatud kümnendarvu 392_{10} kahendväärtus 110001000_2 BCD-koodi. Ridades 2 kuni 4 toimub nihe vasakule, reas 5 toimunud nihke tulemusena on tetraadis 3 väärtus 1100, mis nõuab parandusliiget +0110 (+6) ja selle liitmisel tekkinud tulemus on reas 6. Reas 8 toimub ülekanne "1" tetraadi 3 vanemast bitist tetraadi 2 nooremasse, mis jällegi tekitab vajaduse parandusliikme järele. Reas 11 on ülekanded "1" nii tetraadist 3 tetraadi 2 kui ka tetraadist 2 tetraadi 1. Reas 13 tekib tetraadi 3 keelatud väärtus, tetraadist 2 aga ülekanne. Seega on tetraadi 2 vaja korrigeeriga kaks korda: parandusliige +0110 (rida 14) ja ülekanne tetraadist 3 (rida 15).

Rea nr.	Parandusliige	Tetraad 1	Tetraad 2	Tetraad 3	
1					110001000_2
2				1	10001000
3				11	0001000
4				110	001000
5	+6			1100	01000
6			0001	0010	01000
7			0010	0100	1000
8			0100	1001	000
9	+6		1001	0010	00
10			1001	1000	00
11	+6	0001	0011	0000	0
12		0001	1001	0110	0
13	+6	0011	0010	1100	-
14		0011	1000(+1)	0010	-
15		0011	1001	0010	Tulemus
		3	9	2_{10}	

- **Teisendus BCD-koodist 8421 kahendsüsteemi**

Teisendus baseerub BCD koodis esitatud arvu nihetamisel paremale (s.o. vasakult sissenihutamisel kahendkoodi). Nihe paremale tähendab teatavasti üldjuhul arvu arvvaartuse jagamist kahega. Kui aga nihutamise tulemusena väärtus "1" nihkub vanema tetraadi (näiteks kümneliste tetraad) nooremast bitist noorema tetraadi (üheliste tetraad) vanemasse bitti, väheneb tema väärtus aga 10-lt (kümneliste tetraadi noorem bitt) 8-le (üheliste tetraadi vanem bitt). Seega on vajalik parandusliige "-3"

Järgnevas näites on arvu 392_{10} BCD-koodi teisendusel seda parandusliiget rakendatud ridades 2, 4, 6 ja 10 tekkinud juhtudel. Tabeli teises veerus on esitatud BCD koodi tetraadidesse "allesjäänud" väärtuse kümnend-ekvivalent.

Rea nr.	BCD tetraadide väärtus	Tetraad 1	Tetraad 2	Tetraad 3	Tulemus
1	392	0011	1001	0010	
2		0001	1100	1001	0
3	196	0001	1001	0110	0
4		0000	1100	1011	00
5	98	0000	1001	1000	00
6		0000	0100	1100	000
7	49	0000	0100	1001	000
8	24	0000	0010	0100	1000
9	12	0000	0001	0010	01000
10		0000	0000	1001	001000
11	6	0000	0000	0110	001000
12	3	0000	0000	0011	0001000
13	1	0000	0000	0001	10001000
14	0	0000	0000	0000	110001000 ₂

- **Liitmine BCD-koodis "8421"**

Kui kahe tetraadi A_i ja B_i ning tetraadi sissetuleva ülekande c_i summa on väiksem 10-st, on saadava summa-tetraadi väärtus korrektne, kuna tegelikult toimub tavaline kahendliitmine.

Kui kahe tetraadi A_i ja B_i ning tetraadi sissetuleva ülekande c_i summa on 10 või suurem, tuleb kasutada parandusliiget +0110 (+6), et "ületada" 6 keelatud kombinatsiooni ja genereerida ülekanna "1" järgmisesse tetraadi. Märkime, et ülekanna võib genereeruda ka juba liitmise käigus, kui summa on suurem kui 15. Maksimaalne summa väärtus on $9 + 9 + 1$ (sissetulev ülekanna) ehk $19_{10} = 1\ 0011_2$, s.o. tetraadi enda väärtus summana on 0011, millele liites parandusliikme 0110 saame korrektseks tetraadiks 1001; ülekanna "1" vanemasse tetraadi genereerub kohe tetraadide liitmise käigus. Seega võime formuleerida, et parandusliiget +0110 on vaja juhul kui summatetraadi väärtus on keelatud kombinatsioon või tetraadide liitmisel tekib ülekanna "1" vanemasse tetraadi.

Lühidalt:

- $A_i + B_i + c_i < 10 \Rightarrow$ tetraad õige, ülekanna $c_{i+1} = 0$
- $A_i + B_i + c_i \geq 10$ või $c_{i+1} = 1 \Rightarrow$ tetraadile liita +0110, ülekanna $c_{i+1} = 1$

Näide: $392_{10} + 177_{10}$

Kümnendväärtus	Tetraad 1	Tetraad 2	Tetraad 3
392	0011	1001	0010
177	0001	0111	0111
	0100	(1)0000	1001
	+1	+0110	
569	0101	0110	1001

Tetraadis 3 pole parandusliige vajalik ja tulemus on automaatselt õige. Liitmisel tetraadis 2 tekib ülekanne, seega on vajalik parandusliige +0110. Ülekanne "1" kantakse edasi tetraadi 1. Seal pole jällegi parandusliiget vaja.

- **Liitmine koodis XS3**

Koodis XS3 on teatavasti täidetud nn. "täienduvus 9-ni" tingimus, mistõttu ülekanded genereeruvad automaatselt tetraadide liitmise käigus. Kuna mõlemad liidetavad tetraadid on esitatud "liiase 3-ga", on igal juhul vajalik parandusliikme rakendamine. Juhul kui tetraadide liitmise tulemus on väärtuselt väiksem või võrdne 15-ga (s.o. ülekanne vanemasse tetraadi ei teki), on parandusliikme väärtus -0011 ehk -3 (täiendkoodina +1101), kuna vastasel juhul oleks resultaat juba "liiase 6-ga" (liidetakse kaks "liiase 3-ga" tetraadi). Kui liitmise tulemusena tekib ülekanne vanemasse tetraadi, on parandusliikme väärtuseks +0011 ehk +3, kuna "vahele tuleb jätta" jällegi 6 kombinatsiooni, kuid summa sisaldab juba +3 võrra suuremat väärtust nõutavast.

Lühidalt:

- $(A_i + 3) + (B_i + 3) + c_i \leq 15 \Rightarrow$ tetraadile parandusliige -0011 (ehk +1101), $c_{i+1} = 0$
 - $(A_i + 3) + (B_i + 3) + c_i \geq 16 \Rightarrow$ tetraadile parandusliige +0011, $c_{i+1} = 1$

Näide: $392_{10} + 177_{10}$

392_{10}	0110	1100	0101
177_{10}	0100	1010	1010
	1011	(ülekanne 1) 0110	1111
	-0011	+0011	-0011
569_{10}	1000	1001	1100

- **Korrutamine** on analoogne tavalisele korrutamisele kümnendsüsteemis, kuid arvestada tuleb tetraadidevaheliste nihete omapära.

Illustreerime korrutamist näitega $96_{10} * 27_{10}$ koodis 8421.

Ridades 1 ja 2 on toodud tegurid. Reas 3 on esimene osakorrutis ($1 \cdot 96$). Ridades 4 ja 5 on teine osakorrutis ($2 \cdot 96$, nihe 1 bitt vasakule) vastavalt enne korrektsiooni ja pärast korrektsiooni +6 kahes nooremas tetraadis. Ridades 6 ja 7 on toodud osakorrutis ($4 \cdot 96$, nihe veel 1 bitt vasakule) jäälegi enne ja pärast parandusliikmete rakendamist. Ridades 8 ja 9 on osakorrutis ($20 \cdot 96$) enne ja pärast parandusliikme

rakendamist. Reas 10 on toodud tetraadide summa, rida 11 sisaldab parandusliikmeid ja rida 12 lõpptulemust.

1	96 ₁₀			1001	0110
2	27 ₁₀			•	0010
3	1•96			+(10)	1001
4	2•96	+0110		0001	0010
5	192			0001	1001
6	4•96	+0110		0011	0010
7	384			0011	1000
8	20•96		0001	0010	1100
9	1920	+0110	0001	1001	0010
10			0010	1111	1101
11				0110	1100
12	2592		0010	0101	1001

• **Negatiivsed arvud BCD-koodides**

Koodis XS3 on kõige lihtsam esitada negatiivseid arve läbi vastavate positiivsete tetraadide pöördkoodide. Lisada tuleb täiendavalt vasakule märgibitt (või märgitetraad).

Järgnevalt on esimeses reas arvu kuju 8421 koodid, teises reas XS3 koodis ja kolmandas vastava negatiivse arvu kuju XS3 koodis.

+2309	0000	0010	0011	0000	1001
XS3	0000	0101	0110	0011	1100
-2309	1111	1010	1001	1100	0011

Koodis 8421 tuleb kõigepealt liita igale tetraadile parandusliige +6, siis viia tetraad pöördkoodi ja lisada märgibitt (tetraad). Märgime, et positiivse ja negatiivse tetraadi väärtuste summa on alati võrdne 1001-ga ehk 9-ga.

Järgnevas on esimeses reas arv ise, teises reas vahetulemus pärast korrektsiooni +6 ja kolmandas reas negatiivne arv.

+2309	0000	0010	0011	0000	1001
+6	0000	1000	1001	0110	1111
-2309	1111	0111	0110	1001	0000

Järgnevates näidetes on illustreeritud liitmist koos negatiivsete arvude rakendamisega koodides XS3 ja 8421.

-2305 ₁₀ + 1285 ₁₀					
+2305 (8421)	0000	0010	0011	0000	0101
+2305 (XS3)	0000	0101	0110	0011	1000
-2305 (XS3)	1111	1010	1001	1100	0111
+1285 (XS3)	0000	0100	0101	1011	1000
Vahetulemus	1111	1110	1111	0111	1111
Parandusliikmed		-0011	-0011	+0011	-0011
-1020 (XS3)	1111	1011	1100	1010	1100
Otskoodis (XS3)	-	0100	0011	0101	0011
Kümnendväärtus	-	1	0	2	0

+2305 (8421)	0000	0010	0011	0000	0101
-2305 (8421)	1111	0111	0110	1001	0100
+1285 (8421)	0000	0001	0010	1000	0101
Vahetulemus	1111	1000	1001	0001	1001
Parandusliige				+0110	
-1020 (8421)	1111	1000	1001	0111	1001
Otsekoodis (8421)	-	0001	0000	0010	0000
Kümnendväärtus	-	1	0	2	0

Näited koodis 8421

-216 ₁₀ +191 ₁₀					
-216 ₁₀	1111	0111		1000	0011
+191 ₁₀	0000	0001		1001	0001
Vahetulemus	1111	1001	(ülekanne 1)	0001	0100
Parandusliige				+0110	
-025 ₁₀	1111	1001		0111	0100
216 ₁₀ -191 ₁₀					
+216 ₁₀	0000		0010	0001	0110
-191 ₁₀	1111		1000	0000	1000
Vahetulemus	0000	(ülekanne 1)	1010	0010	(ülekanne 1)1110
Parandusliige			+0110		+0110
+024 ₁₀	(1)0000		0000	0010	0100
+25 ₁₀	0000		0000	0010	0101

Viimases näites rakendub pöördkoodi puhul iseloomulik ringülekanne - vanemast (märgi)tetraadist väljaleviv "1" liidetakse juurde nooremale tetraadile (vt. viimane rida).

Näited koodis XS3

216 ₁₀ -191 ₁₀					
+216 ₁₀	0000		0101	0100	1001
-191 ₁₀	1111		1011	0011	1011
Vahetulemus	(1)0000		0000	1000	0100
Parandusliikmed			+0011	-0011	+0011
ringülekanne			0011	0101	0111
+025 ₁₀	0000		0011	0101	1000
-216 ₁₀ +191 ₁₀					
-216 ₁₀	1111		1010	1011	0110
+191 ₁₀	0000		0100	1100	0100
Vahetulemus	1111		1111	0111	1010
Parandusliikmed			-0011	+0011	-0011
-025 (XS3)	1111		1100	1010	0111
-025 ₁₀	-		0011	0101	1000