Loogikafunktsioonide minimeerimine Quine-McCluskey meetodil

Karnaugh' kaart võimaldab effektiivselt minimeerida funktsioone, mille muutujate arv on suhteliselt väike. Samuti on kaart eelkõige visuaalne minimeerimisvahend ning on tülikas algoritmiseerimiseks. Sisaldab heuristikat ja "kogemust".

Quine-McCluskey (järgnevas McCluskey) minimeerimismeetod on süstemaatiline ja kergesti viidav algoritmilisele kujule. Puuduvad piirangud funktsiooni muutujate arvule.

- McCluskey meetod koosneb kahest põhietapist:

1. Loogikafunktsiooni kõigi lihtimplikantide leidmine, kasutades süstemaatiliselt kleepimisseadusi
2. Lihtimplikantide hulga minimeerimine (katteülesanne)

Kaks enamlevinud varianti antud meetodist erinevad algandmete esituselt. Need on niinimetatud ***intervallmeetod***, mille puhul implikantide kirjeldamiseks kasutatakse intervallesitust ja ***numbriline meetod***, mis on orienteeritud funktsiooni kümnendesitusele.

Intervallmeetod

Kuna McCluskey meetod põhineb kleepimisseaduse kõikvõimalikele rakendustele antud funktsiooni ühtede piirkonnas, on otstarbekas esmalt sektsioneerida kogu funktsiooni ühtede piirkond vastavate kahendvektorite nn. indeksite järgi. Sellega minimeeritakse läbiviidavate võrdluste arvu. ***Boole'i vektori indeks*** on ühtede arv selles vektoris. Ilmselt on omavahel kleebitavad vaid need kahendvektorid, mille indeksid erinevad täpselt ühe võrra Seejuures langevad (n-1) argumendi väärtused kokku ja ühe argumendi väärtus on kleebitavates vektorites erinev.

Pärast indeksite määramist toimub kleepimisseaduse alusel intervallide tabelite koostamine.

Esimese etapi lõpuks saadakse kõigi antud funktsiooni lihtimplikantide loetelu.

Teise etapi käigus seda loetelu minimeeritakse s.t. valitakse minimaalne alamhulk lihtimplikantidest, mis võimaldavad katta antud funktsiooni ühtede piirkonna (s.o. tüüpiline nn. katteülesanne).

<u>Näide</u> $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)_1$

1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

In-deks	Inter-vall	Mär-ge	Indeks	Intervall	Märge	Indeks	Intervall	Märge
0	0000	x	0-1	000-	x	0-1-1-2	-00-	A4
1	0001	x		00-0	x		-0-0	A5
	0010	x		-000	x	1-2-2-3	--10	A6
	1000	x	1-2	0-01	A1			
2	0101	x		-001	x			
	0110	x		0-10	x			
	1001	x		-010	x			
	1010	x		100-	x			
3	0111	x		10-0	x			
	1110	x	2-3	01-1	A2			
				011-	A3			
				-110	x			
				1-10	x			

2.etapp - lihtimplikantide hulga minimeerimine

Impl.	0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
A1		x		x						
A2				x		x				
A3					x	x				
A4	x	x					x	⊗		
A5	x		x				x		x	
A6			x		x				x	⊗

Lahendis osalevad lihtimplikandid peavad katma funktsiooni ühtede piirkonna. Lihtimplikandid A4 ja A6 on igal juhul vajalikud, kuna nad võimaldavad ainsatena katta vektoreid 9 ja 14 (tabelis ⊗). Implikantide A4 ja A6 lülitamine lahendisse katab ühtlasi ka vektorid 0,1,8 (A4) ja 2,6,10 (A6). Seega jäävad katmata vektorid 5 ja 7, mis omakorda kaetakse implikandiga A2.

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = A6 \vee A4 \vee A2 = \bar{x}_2 \overline{x_3} \vee x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_4$$

Numbriline meetod

Implikantide kujutamine kolmendintervallide kujul võib olla küllalt tülikas, kui funktsiooni argumentide arv on küllalt suur. Pikkade intervallidega suureneb vigade tõenäosus (seda küll käsitsi lahendamisel). Meetodi 2. etapil tekitab probleeme kattetabeli täitmine, kus paratamatult läheme intervallidelt tagasi kümnendesitusele. ***McCluskey numbriline meetod*** säilitab andmete esituse kümnendkujul praktiliselt kuni lahendi väljakirjutamiseni. Kleepimisseaduste rakendus numbrilisel kujul nõuab teatavaid lisareegleid, mida järgnevas kirjeldame. Kümnendnumbri indeksi mõiste on endiselt seotud numbrile vastava kahendvektori ühtede arvuga. Numbrid on omavahel kleebitavad, kui:

1. numbrite vahe on võrdne 2^k , kus k=0,1,2...;
2. suurema numbriga seostub suurem indeks.

Igal kleepimisel fikseeritakse numbrite vahe, mis hilisemas on vajalik kleepimisel väljalangeva argumendi määramiseks. Vahede fikseerimiseks on vaja alates lihtimplikantide leidmise etapi teisest tabelist lisaveergu **„Vahe“**

Kasutades uuesti sama näidet, leiame lihtimplikantide hulga numbrilisel meetodiga.

1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge
0	0	x
1	1	x
	2	x
	8	x
2	5	x
	6	x
	9	x
	10	x
3	7	x
	14	x

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1	0-1	1	x
	0-2	2	x
	0-8	8	x
1-2	1-5	4	A1
	1-9	8	x
	2-6	4	x
	2-10	8	x
	8-9	1	x
	8-10	2	x
2-3	5-7	2	A2
	6-7	1	A3
	6-14	8	x
	10-14	4	x

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1-1-2	0-1-8-9	1,8	A4
	0-2-8-10	2,8	A5
1-2-2-3	2-6-10-14	4,8	A6

Leitud lihtimplikantide hulga minimeerimine toimub täpselt samuti, kui intervallmeetodi puhul. Lahendisse satuvad lihtimplikandid A2, A4 ja A6. Märgime, et siiani oleme kogu info esitanud eranditult kümnendkujul. Minimaalse DNK väljakirjutamisel võib lähtuda järgnevas tabelis kirjeldatud mõttekäigust.

Lihtimp-likant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4
A2	2	0	1	-	1
A4	1,8	-	0	0	-
A6	4,8	-	-	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A6 \vee A4 \vee A2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(2,5,6,7,10,11,14)_0$

1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge	Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
1	2	x	1-2	2-6	4	x	1-2-2-3	2-6-10-14	4,8	A4
2	5	x		2-10	8	x				
	6	x	2-3	5-7	2	A1				
	10	x		6-7	1	A2				
3	7	x		6-14	8	x				
	11	x		10-11	1	A3				
	14	x		10-14	4	x				

2.etapp - lihtimplikantide hulga minimeerimine

Impl.	2	5	6	7	10	11	14
A1		$\otimes$		x			
A2			x	x			
A3					x	$\otimes$	
A4	$\otimes$		x		x		$\otimes$

Lihtimp-likant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4
A1	2	0	1	-	1
A3	1	1	0	1	-
A4	4,8	-	-	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_3} \vee x_4)$$

NB!! Teha sama näide läbi intervallmeetodiga!!

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,2,4,8,10,12)_1\ (5,13,15)_-$

1.etapp - lihtimplikantide hulga leidmine

Ind.	Nr.	Märge
0	0	x
1	2	x
	4	x
	8	x
2	5*	x
	10	x
	12	x
3	13*	x
4	15*	x

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1	0-2	2	x
	0-4	4	x
	0-8	8	x
1-2	2-10	8	x
	4-5	1	x
	4-12	8	x
	8-10	2	x
	8-12	4	x
2-3	5-13*	8	x
	12-13	1	x
3-4	13-15*	2	#

Ind.	Nr.-d	Vahe	Märge
0-1-1-2	0-2-8-10	2,8	A1
	0-4-8-12	4,8	A2
1-2-2-3	4-5-12-13	1,8	A3

2.etapp

Impl.	0	2	4	8	10	12
A1	x	$\otimes$		x	$\otimes$	
A2	x		x	x		x
A3			x			x

Lihtimp-likant	Vahed	x_1	x_2	x_3	x_4
A1	2,8	-	0	-	0
A2	4,8	-	-	0	0
A3	1,8	-	1	0	-

Antud funktsiooni jaoks eksisteerib kaks keerukuselt võrdväärset lahendit (NB!! mõlemad on MDNK-d!!):

$$f^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = A1 \vee A2 = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = A1 \vee A3 = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3$$

NB!! Teha sama näide läbi intervallmeetodiga!!