Loogikafunktsioonide täielik süsteem

Eelnevast on teada, et suvaline loogikafunktsioon on esitatav DNK ja KNK kujul. Järelikult on suvaline funktsioon kujutatav läbi funktsioonide "ja", "või" ja "ei". Loogikafunktsioonide süsteemi, mille abil on võimalik kujutada suvalise keerukusega loogikafunktsiooni, nimetatakse täielikuks süsteemiks.

Olgu antud loogikafunktsioonide süsteem S:

$S=\{ f_1(x_1 ,x_2 ,..... ,x_{n1}), f_2(x_1 ,x_2 ,..... ,x_{n2}),...., f_m(x_1 ,x_2 ,..... ,x_{nm})\}$

- Süsteemi S **superpositsiooniks** nimetatakse funktsiooni *f*, mis on saadud süsteemi S funktsioonidest järgnevalt:

1.funktsiooni $f_i \in S$ muutujate ümbernimetamisega;
2.funktsiooni $f_j \in S$ mõne muutuja asendamisega funktsiooniga $f_k \in S$;
3.eelneva kahe tegevuse korduval rakendamisel.

- Süsteemi S nimetatakse **täielikuks**, kui suvaline funktsioon $f(x_1 ,x_2 ,..... ,x_n)$ on esitatav läbi süsteemi S superpositsiooni.

- Täielik süsteem S on **baassüsteem**, kui tema täielikkus kaob suvalise funktsiooni $f_i \in S$ eemaldamisel süsteemist S.

- Klass K_0 - nulli säilitavate loogikafunktsioonide klass.

$$\boldsymbol{K_0 = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(0,0,\ldots,0) = 0\}}$$

$$\boldsymbol{\{ f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 \} \subset K_0}$$

- Klass K_1 - ühte säilitavate loogikafunktsioonide klass.

$$\boldsymbol{K_1 = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(1,1,\ldots,1) = 1\}}$$

$$\boldsymbol{\{ f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}, f_{15} \} \subset K_1}$$

• Klass K_{lin} - lineaarsete loogikafunktsioonide klass.

$$\boldsymbol{K_{lin} = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) =}$$
$$\boldsymbol{= c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n \}, \text{ kus } c_i \in \{0,1\}}$$

Seega iga lineaarse funktsiooni jaoks eksisteerib selline kahendvektor $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, et funktsioon on esitatav definitsioonis toodud lineaarpolünoomina.
Kõikvõimalikest n-argumendi loogikafunktsioonidest on lineaarseid funktsioone 2^{n+1} .

$$\boldsymbol{\{ f_0, f_3, f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{15} \} \subset K_{lin}}$$

• Klass K_d – pööratavate ehk iseendaga duaalsete funktsioonide klass

Kaks loogikafunktsiooni $\boldsymbol{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ **ja** $\boldsymbol{f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ **on omavahel duaalsed, kui**

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_j(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

$$K_d = \left\{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| \; f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \right\}$$

$\{ f_3, f_5, f_{10}, f_{12} \} \subset K_d$

• Klass K_{mon} - monotoonsete loogikafunktsioonide klass

$K_{mon} = \{ f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid$

$(\alpha_i \geq \beta_i, i = 1, \ldots, n) \rightarrow (f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq f_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n))\}$

Iga loogikafunktsioon, mis ei sisalda DNK kujus inversioone, on monotoonne ning vastupidi, iga monotoonne loogikafunktsioon on esitatav DNK-na, mis ei sisalda inversioone.

$\{ f_0, f_1, f_3, f_5, f_7, f_{15} \} \subset K_{mon}$

- Loogikafunktsioonide klass S on suletud, kui suvaline selle klassi funktsioonide superpositsioon kuulub samuti klassi S.

Klassid K_{lin} ja K_{mon} on suletud klassid.

- Selleks, et süsteem S oleks täielik, on piisav ja tarvilik, et ta sisaldaks nulli mittesäilitavat funktsiooni, ühte mittesäilitavat funktsiooni, mittelineaarset funktsiooni, mittemonotoonset funktsiooni ja iseendaga mitteduaalset funktsiooni.