Baassüsteemid

Vaatleme kõigi kahe muutuja funktsioonide hulga alamhulka:

$\{ f_0,\ f_1,\ f_6,\ f_7,\ f_8,\ f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15} \}$.

Funktsioonid f_8 (Pierce'i funktsioon) ja f_{14} (Shefferi funktsioon) ei kuulu ühtegi eelpool vaadeldud viiest funktsioonide klassist. Järelikult on võimalik moodustada kaks ühe funktsioonilist baassüsteemi:

- Pierce'i baas $B_1 =\{ f_8 \}$
- Shefferi baas $B_2 =\{ f_{14} \}$

Ülejäänud funktsioonide baasil on võimalik klassidesse mittekuuluvuse alusel moodustada veel seitse baassüsteemi.

- Konjunktiivne baas $B_3 =\{ f_1 , f_{12} \}$
- Disjunktiivne baas $B_4 =\{ f_7 , f_{12} \}$
- Implikatiivsed baasid $B_5 =\{ f_{12} , f_{13} \}$, $B_6 =\{ f_0 , f_{13} \}$, $B_7 =\{ f_6 , f_{13} \}$
- Reed-Mulleri baas (Zhegalkini baas) $B_8 =\{ f_1 , f_6 , f_{15} \}$
- $B_9 =\{ f_6 , f_7 , f_{15} \}$

Baaside leidmiseks võib kasutada katteülesande modifikatsiooni, kus veergudeks on vastavasse klassi mittekuuluvus, ridadeks aga vaadeldav funktsioonide alamhulk. Baassüsteemi moodustavad funktsioonid (read), mis katavad mittekuuluvuse kõigisse viide klassi.

Loogikafunktsiooni esitamine baassüsteemides

Olgu antud funktsioon DNK kujul (või KNK kujul):

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)$$

Esitame funktsiooni $f(x_1, x_2, x_3)$ baassüsteemides B_1 kuni B_9 .

- $B_1 = \{ f_8 \}$

Teisenduseks on sobivaim lähtuda KNK-st, inverteerida funktsiooni kahekordselt ning rakendada De Morgani seadust.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow (x_1 \downarrow x_3)$$

- $B_2 = \{ f_{14} \}$

Teisenduseks sobib funktsiooni DNK-d inverteerida kahekordselt ja rakendada De Morgani seadust.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_1) | ((x_2 | x_2) | x_3)$$

• B_3 ={ f_1 , f_{12} }

Lähtuda võib suvalisest normaalkujust, ellimineerides mittelubatud disjunktsiooni. Erinevus baasist B_2 seisneb selles, et baas B_3 lubab kasutada "puhast" konjunktsiooni (ilma inversioonita).

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{\left(\overline{x}_1 \ \& \ x_2\right)} \& \overline{\left(\overline{x}_1 \ \& \ \overline{x}\right)}$$

• B_4 ={ f_7 , f_{12} }

Teisendus analoogiline teisendusega baassüsteemi B_3 . Erinevusena baasist B_1 märgime "puhta" disjunktsiooni kasutamise võimalust.

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 \vee \overline{\left(x_2 \vee \overline{x_3}\right)}$$

• $B_5 = \{ f_{12}, f_{13} \}$

Teisenduseks kasutame järgmisi abivalemeid:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{x}_1 \rightarrow x_2$$

$$x_1 \,\&\, x_2 = \overline{x_1 \rightarrow \overline{x}_2}$$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1$

Märgime, et resultaadi minimaalsus sõltub DNK liikmete paigutusest ja asenduste sooritamise järjekorrast.

• $B_6 = \{ f_0, f_{13} \}$

Kasulikud on järgmised abivalemid:

$$\overline{x} = x \rightarrow 0$$

$$x_1 \vee x_2 = (x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2$$

$$x_1 \,\&\, x_2 = (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)) \rightarrow 0$$

$$(x_1 \rightarrow 0) \rightarrow (x_2 \rightarrow 0) = x_2 \rightarrow x_1$$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow 0) \rightarrow ((x_3 \rightarrow x_2) \rightarrow 0) = (x_3 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1$

• $B_7 = \{ f_6 , f_{13} \}$
Teisendus sellesse baassüsteemi on eelneva põhjal iseseisvaks tööks.

• $B_8 = \{ f_1 , f_6 , f_{15} \}$

Reed-Mulleri ehk Zhegalkini baasile vastab algebra, kus kehtivad:
kommutatiivsus: $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
distributiivsus: $x_1 \,\&\, (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1$$

Teisendusel kasulikud abivalemid:

$$\bar{x} = x \oplus 1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$$

Resultaat: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_3$

Kui vaadeldavas algebras analoogiliselt eelmise näitega avada sulud, saame normaalkuju sarnase avaldise, kus disjunktsiooni asemel kasutatakse funktsiooni $\oplus$ ja puuduvad argumentide inversioonid. See on loogikafunktsiooni Reed-Mulleri polünoom.

- Iga loogikafunktsiooni jaoks eksisteerib täpselt 1 Reed-Mulleri polünoom (analoogiliselt täielike DNK ja KNK-ga).

Märgime, et kui f_i & $f_j = 0$, siis $f_i \vee f_j = f_i \oplus f_j$. See seos annab võimaluse meile tuntud meetoditega tuletada Reed-Mulleri polünoom näiteks Karnaugh' kaardilt. Selleks on vaja kontuuride moodustamisel mitte lubada nende kattumist (kattumine tähendaks seda, et eksisteerib sisendvektor, mis muudab "1"-ks mõlemale kontuurile vastavad konjunktsioonid). Mittekattuvad kontuurid esitavad Reed-Mulleri polünoomiks sobivaid konjunktsioone, millistes aga on osa argumente inverteeritud. Korrektse Reed-Mulleri polünoomi saamiseks peame inversioonid abivalemiga asendama ning sulud lõplikult avama.

<u>Näide **(NB!! Esimene teisenduse samm näitab, et konjunktsioonide korrutis = 0, s.o. konjunktsioonidele vastavad intervallid ei kattu! Disjunktsiooni asendamine moodul 2 summaga nõuab alati asendusvalemi korrektset kasutamist!)**</u>

$$x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2x_2\bar{x}_3 \oplus x_1\bar{x}_2 \oplus x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2 \oplus x_2\bar{x}_3 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_2(x_3 \oplus 1) =$$
$$= x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2$$

- $B_9 = \{ f_6 , f_7 , f_{15} \}$

Teisendus jääb eelneva põhjal iseseisvaks tööks.

Ülesanne

- Esitada funktsioon $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,4,5,6,12,14)_1$ baassüsteemides B_1 kuni B_9 .