Ülevaade kasutatavatest mõistetest

- *Lausearvutus ja tehted*
- *Predikaatarvutus (sõltuvus argumendist, kvantorid)*
- *Hulgateooria põhimõisted*
- *Graafiteooria põhimõisted*
- *Arvusüsteemid*
- *Vastavused ja relatsioonid*

Lausearvutus ja tehted

Iga lauset, mille puhul saab rääkida tema vastavusest tegelikkusele (tõeväärtusest), nimetatakse lausearvutuslikuks lauseks (nn. „lihtlause").
Näiteid:

- **Lause A: „7 on algarv„ (tõene)**
- **Lause B: "Tallinna Tehnikaülikooli rektor on Tiit Land„ (aeg…?)**
- **Lause C: „1 + 1 = 10„ (sõltub lisainfost…?)**
- **Lause D: "Tallinn asub Helsingist põhjapool„ (väär)**
- **Lause E: "Eestis valiti uus president„ (tõene, aeg…?)**
- **Lause F: „IT teaduskonna tudengite arv suurem kui loodusteaduskonna tudengite arv" (tõene…)**
- **Ei ole lause: „Lähme linnakupeole!"**

Kasutades järgnevaid sidesõnu, saab lihtlausetest moodustada keerukamaid liitlauseid:

"ei" (eitus, inversioon, negatsioon,¬)

"ja" ("ja„/"ning"-tehe, konjunktsioon, &, ^, *)

"või" ("või"-tehe, disjunktsioon, V, +)

"kui" ….., "siis" ……. (järelduse tegemine, implikatsioon, →)

"siis ja ainult siis" ("parajasti siis", samaväärsus, ekvivalents, ↔, ≡, ~)

A & C

(B & E) → (¬ (D) V A) (sulud…?)

D V E

C ↔ & A E - ei ole (liit)lause

Iga lause võib olla tõene või väär - seega lausel on olemas kahevalentne tõeväärtus (1 või 0), vaheväärtusi ei kasutata.
Tähistame: tõene – T ehk "1" (true, tõene, õige) ja väär - F (false) ehk V (väär, vale) ehk "0"

Liitlause tõeväärtus sõltub teda moodustavate lihtlasusete tõeväärtustest ning kasutatud lausearvutuslikest tehetest (NB! Ei sõltu üldse lausete sisust, mis võib olla kontekstiliselt mitteseotud).

Kahe liitlausega P ja Q sooritatavad tehted annavad järgnevad tõeväärtustabelid:

P	¬ P
0	1
1	0

Kahe liitlausega P ja Q sooritatavad tehted annavad järgnevad tõeväärtustabelid

NB!! Tehete prioriteet,
mis määrab ka sulgude kasutamise vajaduse avaldistes /valemites:

¬ , & , V , → , ↔

P	Q	P V Q	P & Q	P → Q	P ↔ Q
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Näide: (P V Q) → (R ↔ (¬ P)) – teeme nn. tõeväärtustabeli

P	Q	R	P V Q	¬ P	R ↔ (¬ P)	(P V Q) → → (R ↔ (¬ P))
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Samaselt tõene lause ehk tautoloogia (näit (A V (¬ A)))
Samaselt väär lause ehk vastuolu (näit (A & (¬ A)))

Predikaatarvutus

Predikaat on lause, mis sisaldab ühte või mitut muutujat

Muutuja(te)st sõltub predikaadi tõeväärtus

$$P(x) \quad P(x,y) \quad \text{jne.}$$

$$P(x) \equiv (x \text{ on algarv})$$

$$P(7) = 1 \qquad P(246) = 0$$

$$P(x,y) \equiv (x > y)$$

$$P(5,3) = 1 \qquad P(3,5) = 0$$

$$P(x,y) \equiv (x \text{ ja } y \text{ on sõbrad})$$

Täidetav (kehtestatav), samaselt tõene, samaselt väär predikaat

Kvantorid:

$\forall$ **- üldsuse kvantor (kehtib iga x korral, sisuliselt & tehe)**

$\exists$ **- eksistentsi kvantor (kehtib vähemalt ühe x korral, sisuliselt V tehe)**

Erikujud: $\exists! x$ **(täpselt üks x)** $\overline{\exists} x$ **(ei leidu x-i)**

Hulgateooria põhimõisted

- **Hulk – objektide kogum**
- **Tähistus: *A, B, C, D, …* või ka A_1, A_2, A_3, …**
- **Elemendid: A = { a, b, x, y } või ka B = { b_1, b_2, b_3 }**
- **Hulga esitus:**
  - **Osaline või täielik elementide loetelu**
  - **Seaduspärasus { x | x on õppekava IACB õppeaine }**
- **N – naturaalarvude hulk, Z – täisarvude hulk, R – reaalarvude hulk**
- **Hulga elemendid ei ole järjestatud - üldjuhul**
- **Iga elementi on „üks eksemplar“ – üldjuhul**
- **Element võib kas kuuluda hulka (a $\in$ A) või mitte kuuluda (c $\notin$ A)**
- **Hulk A võib olla hulga B alamhulk (osahulk): A $\subset$ B**
- **Venni diagrammi olemus, universaalhulk 1 (I, U), tühihulk $\emptyset$**

Hulkade ühend, ühisosa, täiend, astmehulk, ristkorrutis

- **Hulkade ühend**

  $$\mathbf{A \cup B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}}$$

- **Hulkade ühisosa (lõige)**

  $$\mathbf{A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \,\&\, (x \in B) \}}$$

- **Hulga täiend (universaalhulga suhtes)**

  $$\overline{A} = \mathbf{\{ x \mid (x \notin A) \,\&\, (x \in 1) \}}$$

- **Hulga A astmehulgaks 2^A nimetatakse hulga A kõigi alamhulkade hulka.**
- **Hulkade ristkorrutis**

  $$\mathbf{A \times B = \{ < a, b > \mid (a \in A) \,\&\, (b \in B) \}}$$

…järgneb

- **Hulgateoreetilistes avaldistes kasutatakse ka nn. hulkade vahe (/) ja sümmeetrilise vahe (Δ) operatsioone**
- **Hulgad jagunevad – lõplikud ja lõpmatud hulgad**
- **Lõpmatud hulgad omakorda loenduvad ja mitteloenduvad hulgad**
- **Hulga võimsus – lõpliku hulga elementide arv, numbriline väärtus.**
  - **näiteks A = { a, b, c, d }** $\rightarrow$ **│ A │ = 4**

Graafide alusmõisted

- **Graaf – joonismudel objektide (graafi tipud) vaheliste seoste (kaared, servad) kirjeldamiseks.**
- **Graafil G on olemas tippude hulk (T) ja kaarte hulk, mis tippe ühendab (K).**
- **Graaf võib olla orienteeritud (kaartel on näidatud nooltega „liikumissuund“) või orienteerimata (kaari mööda on võimalik liikuda mõlemas suunas.**
- **Graafi esitusviisid:**
  - **Graafilise esitus**
  - **Naabrusmaatriks**
  - **Intsidentsusmaatriks**
  - **Tippude hulk ja seotud tipupaaride (s.o. kaarte) loetelu (ka hulk!!)**

  Näide: G = < T, K > =

  = < { 1, 2, 3, 4 } , { < 1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,4>, <3,4>, <4,3> } >

  Orienteeritud graafiga on väga palju sarnasust relatsioonil ehk binaarsuhtel.

Mõisteid arvusüsteemidest

- Eelkõige on vajalik kahendsüsteem ja sellest täisarvuline esitus, s.o. seosed kahend ja kümnendväärtuste vahel.
- Matemaatilise loogika teemade mõistmiseks piisab 3- kuni 5-kohaliste kahendarvude ja nende kümnendekvivalentide kiirest peast-teisendamisest.
- Põhjalikumalt on arvusüsteemid harjutustunni teemaks.
- **Mõisteid kahendvektoritest (loogikafunktsioonide argumendivektorid):**
  - Kahendvektor ja selle pikkus n
  - Lähisvektorid
  - Intervall (lähisvektorite fikseeritud hulk, täpselt 2^n vektorit
  - Intervalli kolmendesitus, olulised ja mitteolulised (vabad) järgud

Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse

Üleminek lausearvutuselt loogikafunktsioonide keelde

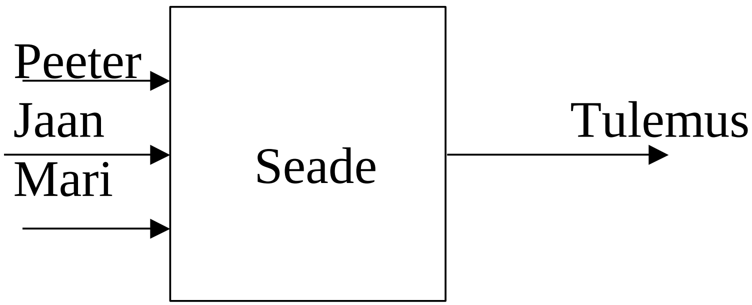
Hääletusseade. Komisjon, mis koosneb 3 inimesest (Peeter, Jaan, Mari), hääletab teatava otsuse vastuvõtmise küsimuses. Otsus võetakse vastu lihthäälteenamusega.

Lause A: Peeter hääletab poolt.
Lause B: Jaan hääletab poolt
Lause C: Mari hääletab poolt

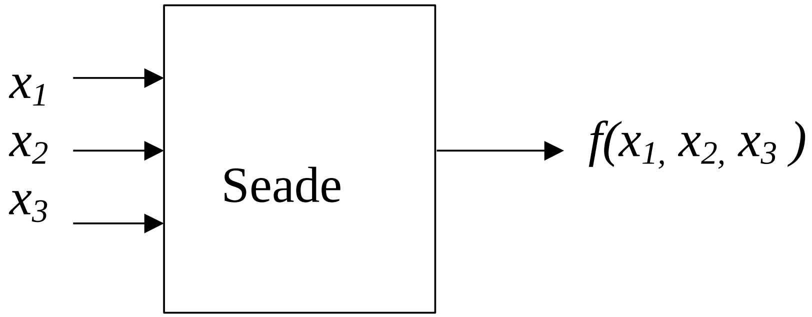
Lause D: Otsus võetakse vastu

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Eeldame, et hääletamine toimub hääletusseadme kasutamisega.



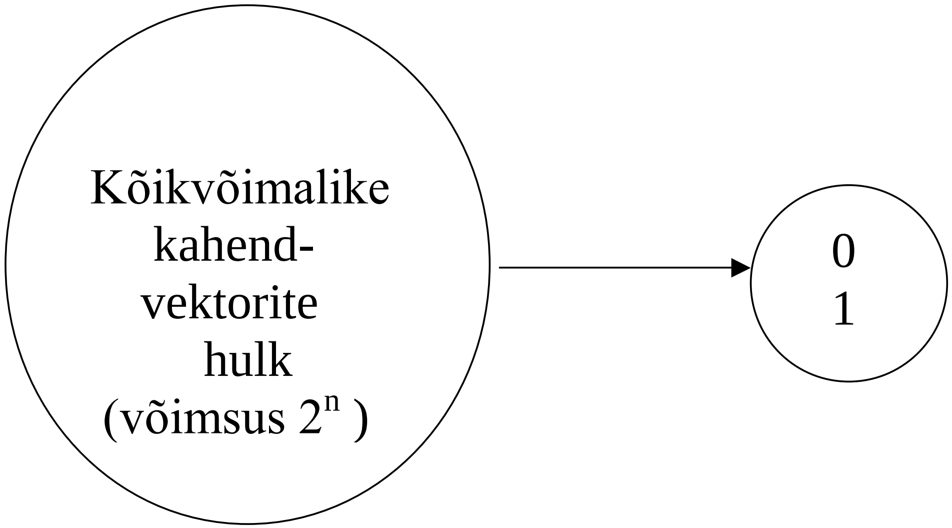
Peeter vajutab hääletusseadme nupule (kas poolt või vastu). Nupp on seotud "seadme" kahendsisendiga x_1, mis omandab sisendis väärtuse vastavalt "1" või "0". See on lause A kujutis. Lausete B ja C kujutisteks on kahendmuutujad x_2 *ja* x_3.
Tulemus (lause D) on avaldatav loogikafunktsioonina $f(x_1, x_2, x_3)$.



x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$



Erinevate loogikafunktsioonide $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ arv:

$$K = 2^{2^n}$$

n=1 → K=4
n=2 → K=16
n=3 → K=256
n=4 → K=65536
n=5 → K=4,3 • 10^9

Kõikvõimalikud kahe muutuja funktsioonid $f(x_1, x_2)$.

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Tabelis on kirjeldatud järgnevad funktsioonid:

f_0 - konstant "0“

f_1 - konjunktsioon, loogiline korrutamine, "ja"-funktsioon, $x_1 \& x_2$ *ehk* $x_1 \bullet x_2$ *ehk* $x_1 x_2$

f_2 - implikatsiooni eitus $\overline{x_1 \to x_2}$

f_3 - argumendi x_1 väärtus

f_4 - pöördimplikatsiooni eitus $\overline{x_2 \to x_1}$

f_5 - argumendi x_2 väärtus

f_6 - argumentide summa mooduliga 2, $(x_1 + x_2)mod2$ *ehk* $x_1 \oplus x_2$

f_7 - disjunktsioon, loogiline liitmine, "või"-funktsioon, $x_1 \vee x_2$ *ehk* $x_1 + x_2$

f_8 - Peirce'i nool, Peirce'i funktsioon, "või-ei"-funktsioon,

$\overline{x_1 \vee x_2}$ ehk $x_1 \downarrow x_2$

f_9 - ekvivalentsi- ehk samaväärsusfunktsioon, $x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_1 \equiv x_2$ *ehk* $x_1 \approx x_2$

f_{10} - argumendi x_2 inversioon

f_{11} - pöördimplikatsioon $x_2 \rightarrow x_1$

f_{12} - argumendi x_1 inversioon

f_{13} - implikatsioon $x_1 \rightarrow x_2$

f_{14} - Shefferi kriips, Shefferi funktsioon,

$\overline{x_1 \& x_2}$ *ehk* $x_1 \mid x_2$

f_{15} - konstant "1"

Matemaatilise loogika põhiseadused

- Idempotentsusseadused

$x \& x = x \qquad x \vee x = x$

- Kommutatiivsusseadused

$x_1 \,\&\, x_2 = x_2 \,\&\, x_1$

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

- Assotsiatiivsusseadused

$(x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3 = x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3)$

$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$

- Distributiivsusseadused **(tõestame tõeväärtustabeliga, järgmine slaid)**

$x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = x_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, x_3$

$x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3)$

- Topelteituse seadus $\overline{\overline{x}} = x$
- De Morgani seadused

$\overline{x_1 \,\&\, x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}$

Teine seadus on tõestatud järgnevas tabelis kõigi võimalike sisendväärtuste jaoks.

x_1	x_2	x_3	$x_2 \,\&\, x_3$	$x_1 \vee x_2 \,\&\, x_3$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
				vasak pool			**parem pool**

- Kleepimisseadused

$$x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1$$

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1$$

- Neeldumisseadused

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$$

$$x_1 \,\&\, (x_1 \vee x_2) = x_1$$

$$x_1 \vee \overline{x_1} x_2 = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \,\&\, (\overline{x_1} \vee x_2) = x_1 x_2$$

- Tehted konstantidega

$x \vee \overline{x} = 1$ $\qquad$ $x \,\&\, \overline{x} = 0$

$x \,\&\, 0 = 0$ $\qquad$ $x \vee 0 = x$

$x \,\&\, 1 = x$ $\qquad$ $x \vee 1 = 1$

- Lisateisendused

$$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2} \vee x_1 \,\&\, x_2$$

Näiteid

$$\left(\left(\overline{x_1 \to x_2}\right) \to \left(x_1 \vee x_2\right)\right) \& \, x_2 = x_2$$

$$\left(\left(x_1 \to x_2\right) \& \left(x_2 \to x_3\right)\right) \to \left(x_3 \to x_1\right) = x_1 \vee \overline{x_3}$$

$$x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} = x_1 \vee x_2 x_3$$

$$\left(\overline{x_1} \vee x_2\right) \to \left(x_1 \overline{x_2} \to x_3\right) = 1$$

$$\left(x_1 \leftrightarrow x_2\right) \to \left(x_1 \oplus x_2\right)$$

- Loogikafunktsiooni konstituent: $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha_i}$, kus

$$(x_i)^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, kui\_\alpha_i = 1 \\ \overline{x_i}, kui\_\alpha_i = 0 \end{cases}$$

- Iga loogikafunktsioon on esitatav oma konstituentide disjunktsioonina.
- Loogikavalem on samaselt tõene (tautoloogia), kui iga argumentide vektori $(x_1, x_2, ..., x_n)$ puhul $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$.
- Loogikavalem on samaselt väär (vastuolu), kui iga argumentide vektori $(x_1, x_2, ..., x_n)$ puhul $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.
- Loogikavalemid f_1 ja f_2 samaväärsed, kui iga argumentide vektori $(x_1, x_2, ..., x_n)$ puhul $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Algtermiks nimetame argumenti x_i või tema inversiooni.
- Loogikavalemi keerukus on tema koosseisus olevate algtermide arv.
- **Loogikavalemi sügavuse määrame järgnevalt:**
  - argumendi x_i sügavus on 0;
  - $F(f_1, f_2, ..., f_n)$ sügavus on k+1, kui $f_1, ..., f_n$ maksimaalne sügavus on k.