

VASTAVUSED

Antud 2 hulka A ja B ning reegel, kuidas hulka A elemendid on vastavuses φ hulga B elementidega.

$$\varphi \subset A \times B \quad \varphi : A \rightarrow B$$

Vastavuse määramispiirkond (domain):

$$D(\varphi) = \{ a \mid \exists b (\langle a, b \rangle \in \varphi) \}$$

Vastavuse muutumispiirkond (range):

$$R(\varphi) = \{ b \mid \exists a (\langle a, b \rangle \in \varphi) \}$$

Vastavuse täiend:

$$\bar{\varphi} = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \notin \varphi \} \quad |\bar{\varphi}| = |A \times B| - |\varphi|$$

Pöördvastavus:

$$\varphi^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \varphi \} \subset B \times A \quad |\varphi^{-1}| = |\varphi|$$

Vastavuste ühend ja ühisosa:

$$\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \varphi_1 \ \& \ \langle a, b \rangle \in \varphi_2 \}$$

$$\varphi_1 \cup \varphi_2 = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \varphi_1 \ \vee \ \langle a, b \rangle \in \varphi_2 \}$$

Vastavuste kompositsioonitehe:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \{ \langle a, c \rangle \mid \exists b (\langle a, b \rangle \in \varphi_1 \ \& \ \langle b, c \rangle \in \varphi_2) \}$$

,kus $\varphi_1 \subset A \times B$ ja $\varphi_2 \subset B \times C$.

Kompositsioonitehe on assotsiatiivse iseloomuga.

Vastavuste klassifikatsioon

Vastavus $\varphi \subset A \times B$ on **kõikjal määratud**, kui $D(\varphi) = A$.

Vastavus $\varphi \subset A \times B$ on **kõikjale määratud**, kui $R(\varphi) = B$.

Vastavus $\varphi \subset A \times B$ on **ühene**, kui $\varphi^{-1} \circ \varphi \subset \{ \langle b, b \rangle \mid b \in B \}$.

Vastavus $\varphi \subset A \times B$ on **üks-ühene**, kui $\varphi^{-1} \circ \varphi \subset \{ \langle b, b \rangle \mid b \in B \}$ ja $\varphi \circ \varphi^{-1} \subset \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$

Ühene vastavus, mis pole kõikjal määratud - **osaliselt määratud funktsioon**.

Ühene vastavus, mis on kõikjal määratud, kuid pole kõikjale määratud - **täielikult määratud funktsioon**.

Ühene kõikjal ja kõikjale määratud vastavus - **sürjektsioon**.

Üks-ühene kõikjal määratud vastavus - **injektsioon**.

Üks-ühene kõikjal ja kõikjale määratud vastavus - **bijektsioon**.

Näide: Hulk A - õpperühma tudengite hulk. Hulk B - hinnete hulk ($B=\{0,1,2,3,4,5\}$). Vastavus φ - eksamil tudengi poolt saadud hinne. Millistel tingimustel on φ osaliselt määratud funktsioon; täielikult määratud funktsioon; surjektsioon; injektsioon; bijektsioon?

BINAARSUHTED

Meie poolt vaadeldavad binaarsuhteid võib käsitleda kui vastavuse φ erijuhtu, kus lähte- ja sihthulk langavad kokku ($D(\varphi)=R(\varphi)=A$). Tähistame järgnevas binaarsuhet tähega $R \subset A \times A$. Binaarsuhet on mugav interpreteerida suhte graafiga - s.o. orienteeritud graaf, kus hulga A elemendid vastavad tippudele ja seosed elementide vahel - kaartele. Suhte võime esitada binaarmaatriksina (naabrusmaatriksina).

Näide.

Hulga $A=\{a,b,c,d,e\}$ elementideks on arvutikomponendid: a-sisendseade, b- aritmeetika-loogikaseade, c-juhtseade, d-mälu, e-väljundseade. Binaarsuhe R seob kahte elementi, kui esimene seade annab teisele infot arvuti töö käigus.

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	0
b	0	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1
e	0	0	1	0	1

Binaarsuhete R omadused

- Refleksiivsus (α_1) - ($\forall a \in A [\langle a, a \rangle \in R]$).
- Antirefleksiivsus (α_2) - ($\forall a \in A [\langle a, a \rangle \notin R]$).

Suhe, mis ei täida nõudeid α_1 ega α_2 , on mitterefleksiivne.

- Sümmeetria (α_3) -
($\forall a, b \in A [\langle a, b \rangle \in R \rightarrow \langle b, a \rangle \in R]$), kus $a \neq b$.

- Antisümmeetria (α_4) -
($\forall a, b \in A [\langle a, b \rangle \in R \rightarrow \langle b, a \rangle \notin R]$), kus $a \neq b$.

Suhe, mis ei täida nõudeid α_3 ega α_4 , on mittesümmeetiline.

- Transitiiivsus (α_5) -
($\forall a, b, c \in A [(\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R) \rightarrow \langle a, c \rangle \in R]$),
kus $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.

- Antitransitiivsus (α_6) -
($\forall a, b, c \in A [(\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R) \rightarrow \langle a, c \rangle \notin R]$),
kus $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.

Suhe, mis ei täida nõudeid α_5 ega α_6 , on mittetransitiivne.

- $d(R, \alpha_i)$ - suhte R kaugus omaduseni α_i , s.o. seoste arv, mis tuleb minimaalselt lisada suhtesse R (või eemaldada suhtest R), et saavutada omadust α_i .

Näide: $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle, \langle d, d \rangle \}$

Leida R kaugus kõigi omadusteni.

- Suhte täiend - $\bar{R} = (A \times A) \setminus R$
- Pöördsuhe - $R^{-1} = \{ \langle a_i, a_j \rangle \mid \langle a_j, a_i \rangle \in R \}$
- Suhte R transitiivseks sulundiks nimetatakse minimaalset transitiivset suhet $\hat{R}$, mis sisaldab suhet R.

Näide:

$R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}$

Leida suhte transitiivne sulund.

- Osaline mitterange järjestussuhe ($\leq$) on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.
- Osaline range järjestussuhe ($<$) on antirefleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.
- Lineaarne järjestussuhe -
 $(\forall a, b \in A) [(a < b) \vee (b < a)]$

Näide: Hulk $A = \{1, 2, 3\}$. Moodustada osaline järjestussuhe hulga A astmehulga elementide vahel, kus suhte määrab alamhulgaks olemine.

Järjestussuhte transitiivne sulund $\hat{R} = R$ (kuna R on algselt transitiivne).

- Ekvalentsisuhe R on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.
- Elemendi $a \in A$ ekvivalentsiklass ekvivalentsisuhtes R - $K(a) = \{ b \mid \langle a, b \rangle \in R \}$
 Ekvivalentsisuhe genereerib tükelduse P hulgal A.

Tükeldus P koosneb ekvivalentsiklassidest K_i , $i=1,...,n$.

$$P = \{ K_1, K_2, ..., K_n \}, \text{ kus } K_i \neq \emptyset, i=1,...,n;$$

$$K_i \cap K_j = \emptyset, i,j=1,...,n, i \neq j;$$

$$\cup K_i = A.$$

0-tükeldus (nulltükeldus) koosneb 1-elementilistest ekvivalentsi klassidest, 1-tükelduses (ühiktükelduses) on ainult üks ekvivalentsiklass.

Operatsioonid түкeldustega:

$$P_1 \bullet P_2 :$$

$$(a_1 \equiv a_2 (P_1 \bullet P_2)) \Leftrightarrow (a_1 \equiv a_2 (P_1) \& a_1 \equiv a_2 (P_2))$$

$$P_1 + P_2 :$$

$$(a_1 \equiv a_2 (P_1 + P_2)) \Leftrightarrow (a_1 \equiv a_2 (P_1) \vee a_1 \equiv a_2 (P_2))$$

$$P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_1 \bullet P_2 = P_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\forall K_i \in P_1 (\exists K_j \in P_2 [K_i \subset K_j])]$$

Näited operatsioonide $P_1 \bullet P_2$ ja $P_1 + P_2$ kohta.

$$P_1 \bullet P_2 \leq P_1 \leq P_1 + P_2$$

$$P_1 \bullet P_2 \leq P_2 \leq P_1 + P_2$$

Näide:

• Antud suhte $R \subset A \times A$ naabrusmaatriks.

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0
5	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	0	1	0	1	1	0
8	0	1	0	0	1	0	0	1

Näidata, et suhte R on ekvivalentsuhe.

Moodustada vastav tükeldus P_1 .

Olgu tükeldus $P_2 = \{ \{1, 4, 6\}, \{3\}, \{7\}, \{2, 8\}, \{5\} \}$

Leida $P_1 \bullet P_2$ ja $P_1 + P_2$

Ülesandeid vastavuste ja suhete temaatikal

• $A = \{ a, b, c, d, e \}$ $B = \{ x, y, z, w \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$\varphi_1 \subset A \times B$

$\varphi_1 = \{ \langle a, y \rangle, \langle b, z \rangle, \langle c, z \rangle, \langle d, w \rangle, \langle d, y \rangle \}$

$\varphi_2 \subset B \times C$

$\varphi_2 = \{ \langle x, 1 \rangle, \langle x, 2 \rangle, \langle x, 4 \rangle, \langle y, 3 \rangle, \langle y, 4 \rangle, \langle w, 3 \rangle \}$

Leida $D(\varphi_1)$, $R(\varphi_1)$, $\overline{\varphi_1}$, φ_1^{-1} , $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_1$. Esitada φ_1 graafiliselt.

Leida $\varphi_1 \circ \varphi_2, (\varphi_1 \circ \varphi_2)^{-1}, \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$.
 Klassifitseerida saadud vastavused.

- $A = \{ 1,2,3,4,5 \}$. Koostada suhe R , mis sisaldab mitte vähem kui 10 seost ja mis on:
 1) refleksiiivne, sümmeetriline ja mittetransitiivne;
 2) mitterefleksiiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

- $A = \{ 1,2,3,4,5 \} \quad R \subset A \times A$

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0

Leida suhte R , tema täiendi ja pöördsuhte omadused (refleksiivus, sümmeetria, transitiivsus, antirefleksiivus, antisümmeetria, antitransitiivsus). Juhul kui mõnel suhtel teatav omadus puudub, leida kaugus selle omaduseni.

- $A = \{ 1,2,3,4,5 \} \quad B = \{ 2,4,6,8 \}$

$$\varphi \subset A \times B \quad \varphi = \{ \langle a,b \rangle \mid a \geq b \}$$

Leida ja klassifitseerida vastavus φ . Leida $\varphi^{-1} \circ \varphi$.

- $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \text{ jagub } b\text{-ga (} a \bmod b = 0) \}$$

Näidata, kas R on osalise järjestuse suhe.

- $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \quad R \subset A \times A$

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 3 \rangle \}$$

Leida suhte R transitiivne sulund.

- Hulga A võimsus on n . Leida kõikvõimalike antireflekstiivsete suhete arv; kõikvõimalike sümmeetriliste suhete arv.
- Antud kõigi sõnade hulk S tähestikus A . Sõna v on sõna w prefiks, kui eksisteerib sõna $u \in S$ nii, et $w = vu$. Näidata, et suhe „sõna v on sõna w prefiks“ on osalise järjestuse suhe hulgal S .