Kiir-sissejuhatus digitaal-elektroonikasse

Priidu Paomets

2002

Sisukord

- Teoreetiline taust
- Boole'i funktsioonid
- Lihtloogika elemendid
- Summaatorid
- Trigerid, Registrid, Loendurid
- (De)kooderid, (De)Multiplekserid
- Mälud
- Automaadid, Käsu täitmine arvutis

Teoreeriline taust

- Digitaalelektroonika teoreetiliseks aluseks on diskreetne matemaatika (algebralised süsteemid, hulgateooriad jne)
- Iga digitaalseade on defineeritud kolme hulga poolt: sisendid (I), siseolekud (S) ja väljundid (O)
- Nendel hulkadel on defineeritud kaks funktsiooni:
  - Üleminkufunktsioon $\boxed{\sigma : S \times I \to S}$ $\boxed{\sigma \subset S \times I \times S}$
  - Väljundfunktsioon $\boxed{\lambda : S \times I \to O}$ $\boxed{\lambda \subset S \times I \times O}$

Teoreeriline taust

- Näitena võib tuua järgnevad hulgad

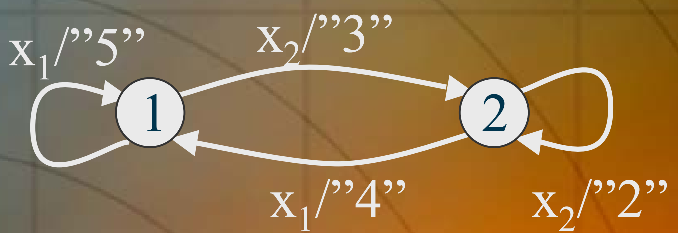
$$\sigma = \{<1, x_1, 1>, <1, x_2, 2>, <2, x_2, 2>, <2, x_1, 1>\}$$
$$\lambda = \{<1, x_1, 5>, <1, x_2, 3>, <2, x_2, 2>, <2, x_1, 4>\}$$

σ \ I	x_1	x_2
1	1	2
2	1	2

$\sigma : S \times I \rightarrow S$

λ \ I	x_1	x_2
1	"5"	"3"
2	"4"	"2"

$\lambda : S \times I \rightarrow O$



Boole'i funktsioonid

- Jättes vahele diskreetse matemaatika sügavamad teemad, jõuame Boole'i funktsioonideni

- Boole'i funktsioonide alfabeet koosneb kahest väärtusest

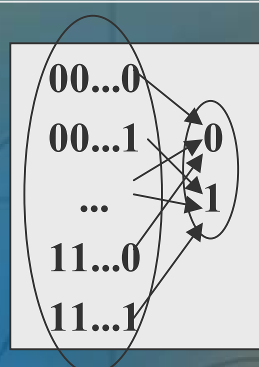
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$f \in \{0,1\}$$

$$\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

$$a \notin A \rightarrow 0$$
$$a \in A \rightarrow 1$$



Boole'i funktsioonid

- Boole'i funktsioonid sisaldavad muutujaid (x_1, x_2, ..., x_n) ja operatsioone (korrutamine, liitmine, jne)

- Funktsioone saab esitada kahel kujul
  - Disjunktiivsel normaalkujul (DNK)
  - Konjunktiivsel normaalkujul (KNK)

$$x \leftrightarrow y = \overline{x}\overline{y} \vee xy$$

$$(\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$$

- Kaks valemit on samaväärsed kui nende tõeväärtused langevad kokku

Boole'i funktsioonid

- Operatsioone, mida kasutada võib, on mitmeid

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = x_1 \;\&\; x_2$$
$$f_2 = \overline{x_1 \to x_2}$$
$$f_3 = x_1$$

$$f_4 = \overline{x_2 \to x_1}$$
$$f_5 = x_2$$
$$f_6 = x_1 \oplus x_2$$
$$f_7 = x_1 \vee x_2$$

$$f_8 = \overline{x_1 \vee x_2};\, x_1 \downarrow x_2$$
$$f_9 = x_1 \sim x_2;\, \overline{x1 \oplus x2}$$
$$f_{10} = \overline{x_2}$$
$$f_{11} = x_2 \to x_1$$

$$f_{12} = \overline{x_1}$$
$$f_{13} = x_1 \to x_2$$
$$f_{14} = \overline{x_1 \;\&\; x_2};x1 \mid x2$$
$$f_{15} = 1$$

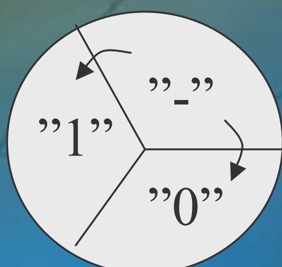
f_8 = Pierce' funktsioon f_9 = Ekvivalentsus f_{14} = Shefferi funktsioon

Boole'i funktsioonid

- Peamised, mida kasutatakse on:
  - f_1 (AND)
  - f_7 (OR)
  - f_{10} (inversioon ehk eitus)
- Nende abil saab moodustada mistahes teisi

Boole’i funktsioonid

- Funkstioonid võivad olla täielikud või osaliselt määratud
- Viimaste puhul saame kolme väärtusega alfabeedi:
  ”0”, ”1”, ”-”
- Sellisel juhul saab funktsiooni kirjutada intervallide kujul



$$f(x_1, \cdots, x_n)$$

$$0-1-01 \Rightarrow \overline{x_1}x_3\overline{x_5}x_6$$

$$0----1 \Rightarrow \overline{x_1}x_6$$

Boole’i funktsioonid

- Kui funktsioonid on osaliselt määratud, saame neid minimiseerida
- Üheks selliseks võimaluseks on heuristiliste kaartide meetod (Carnaugh’ kaart)
- Teiseks võimaluseks on kasutada McCluscy meetodit

Boole'i funktsioonid

- Carnaugh' kaarte saab efektiivselt kasutada kuni 4 muutujaga funktsioonide puhul. Üle 6 muutuja pole aga enam üldse võimalik

- $f(x_1,x_2) \Rightarrow 2^2 = 4$ kombinatsiooni

	$\neg x_2$	x_2
$\neg x_1$	0	1
x_1	1	1

$f = \Sigma(1, 2, 3)_1$

dnk $f = x_1 \vee x_2$

Boole'i funktsioonid

- $f(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow 2^3 = 8$ kombinatsiooni

	$\neg x_2$		x_2	
	$\neg x_3$	x_3	x_3	$\neg x_3$
$\neg x_1$	1	1	1	0
x_1	0	1	1	1

$f = \Sigma(0, 1, 3, 5, 6, 7)_1$

dnk $f = x_3 \vee x_1 x_2 \vee \neg x_1 \neg x_2$

Boole'i funktsioonid

- $f(x_1,x_2,x_3,x_4) \Rightarrow 2^4 = 16$ kombinatsiooni

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	1	0	0

$f = \Sigma(0, 1, 6, 8, 9, 12, 14)_1$

dnk $f = \neg x_2 \neg x_3 \vee x_2 x_3 \neg x_4 \vee x_1\ x_2 \neg x_4$

a) dnk jaoks moodustatakse kontuurid 1-de piirkonnas

b) kontuurid peavad olema mak võimalike mõõtmetega

c) Kontuurid võivad olla 1x1, 1x2, 2x1, 2x2, 1x4, 4x1, 2x2, 2x4

d) Kontuurid võivad kattuda

Boole'i funktsioonid

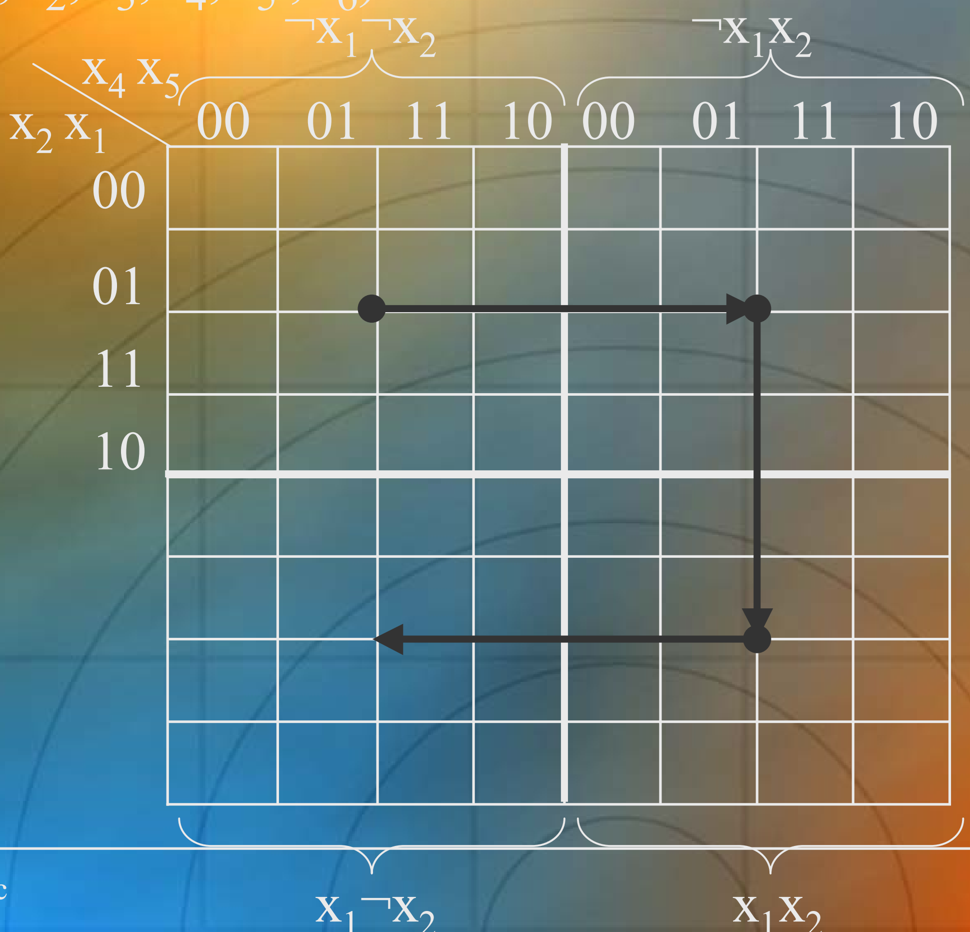
- $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \Rightarrow 2^5 = 32$ kombinatsiooni

	$\neg x_1$				x_1			
$x_2\,x_1$ \ $x_4\,x_5$	00	01	11	10	00	01	11	10
00								
01								
11								
10								

(0 ... 15) (16 ... 31)

Boole'i funktsioonid

- $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \Rightarrow 2^6 = 64$ kombinatsiooni



Boole’i funktsioonid

- Senini oleme vaadelnud vaid disjunktiivel normaalkujul olevaid funktsioone
- KNK moodustamiseks tuleb ”1”-de asemel võtta ”0”-de piirkonnad kontuuride alla
  - Kontuuride määramise reeglid on samad
  - Inversioonide asemel otseväärtused ja vastupidi

Boole'i funktsioonid

- Kui meil on tegemist osaliselt määratud funktsioonidega,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum (0,2,7)_1 (1,3,5)_- \Rightarrow \sum (0,1,2,3,5,7)_1$$

  siis võime neid vabalt võtta kokku kas "1"-de või "0"-de piirkondadega

- Rohkem kui 6 muutujaga funktsioonide puhul tuleb kasutusele võtta McCluscy-Quine meetod (sellest on TTÜ informaatika instituudis loodud ka täiustatud versioon)

Boole'i funktsioonid

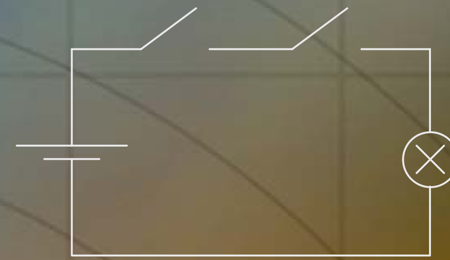
- Ülesanne – proovige minimiseerida järgmised funktsioonid
  - $f(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,2,7)_1 (1,3,5)_-$
  - $f(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,2,4,6)_1 (1,3)_-$
  - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1,5,12,14,15)_1 (2,3,6)_-$
- Leida funktsioon indikaatori ühe segmendi juhtimiseks

Lihtloogika elemendid

- AND / JA / NING (loogiline korrutamine)

$$y = x_1 * x_2$$

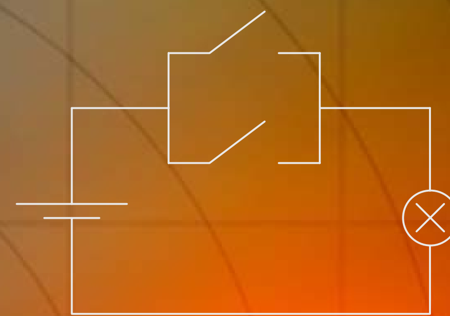
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- OR / VÕI (loogiline liitmine)

$$y = x_1 + x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

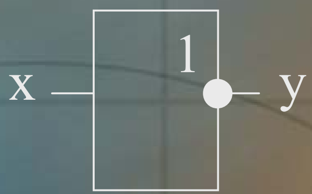


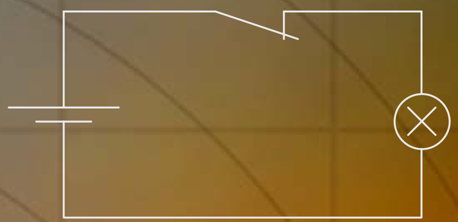
Lihtloogika elemendid

- NOT / EI / Inversioon

$y = \neg x$

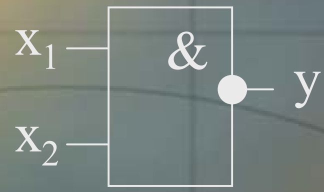
x	y
0	1
1	0





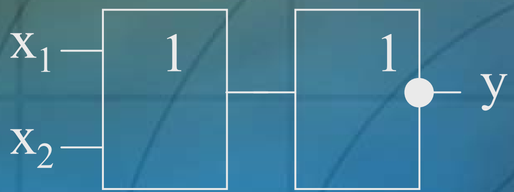
Lihtloogika elemendid

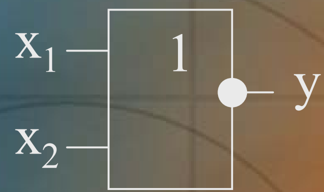
- NAND / JA-EI (Shefferi funktsioon)



x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- NOR / VÕI-EI (Pierce'i funktsioon)



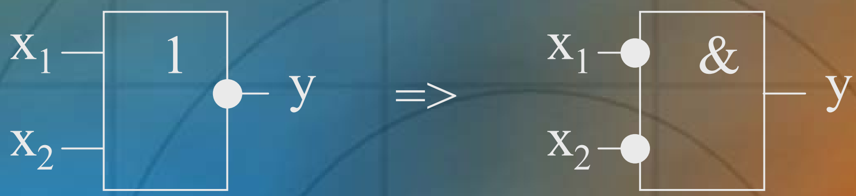


x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Lihtloogika elemendid

- Kasutades De-Morgani reegleid, saame elemente vahetada
  - JA-EI $f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ 1. teoreem

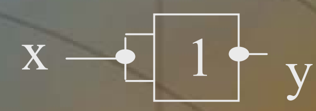
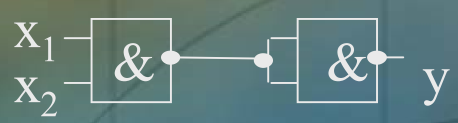
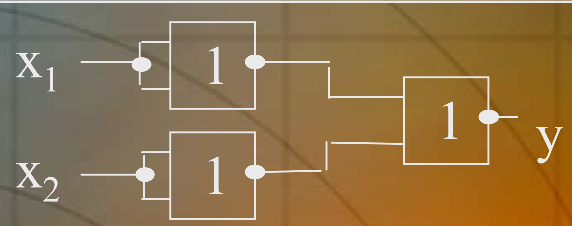
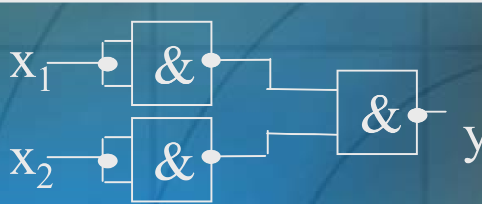
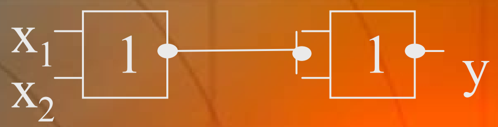
  - VÕI-EI $f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ 2. teoreem



* Need on üleminekud negatiivsele loogikale

Lihtloogika elemendid

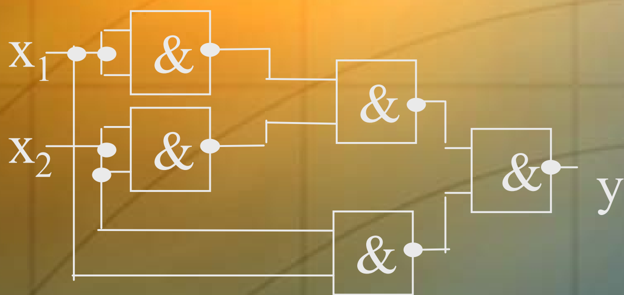
Loogika-funktsioonid ja –lülid on duaalsed

<table>
<tr><th>lüli / f.-n</th><th>JA-EI (Sheffer)</th><th>VÕI-EI (Pierce)</th></tr>
<tr><td>EI</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>JA</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>VÕI</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Lihtloogika elemendid

- Võrdväärsus

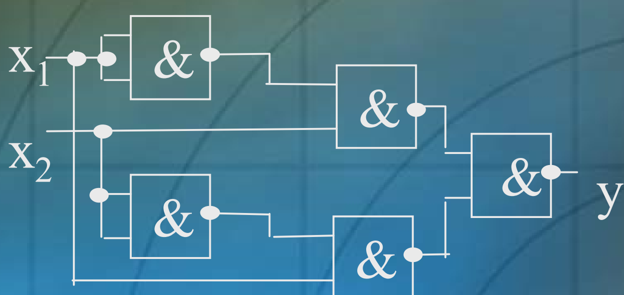
$$f(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} + x_1 x_2$$



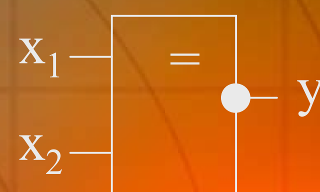
x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Mittevõrdväärsus

$$f(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}$$



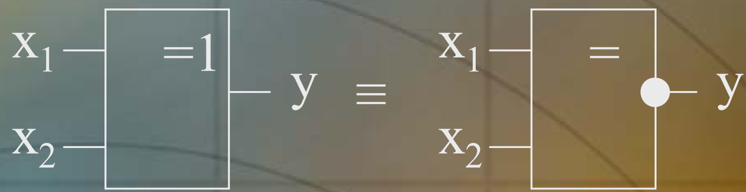
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Lihtloogika elemendid

- Välistav VÕI (exclusive OR / EXOR / XOR)

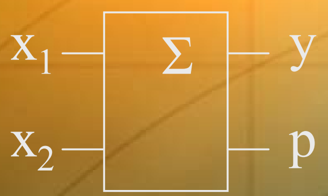
x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

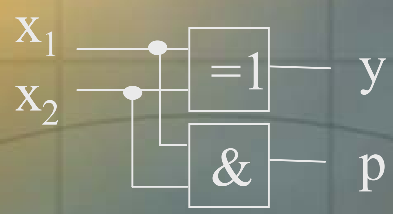


NB! XOR ≠ NOR

Lihtloogika elemendid

- Summaator (realiseeritud XOR abil)





x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ilma ülekandeta (p) on meil poolsummator